



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LEONARDO ANDRADE BISPO SILVA

**MODELO DE DANO CONCENTRADO APLICADO À
FLAMBAGEM LOCAL EM PERFIS VAZADOS DE AÇO
ESTRUTURAL SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA**

São Cristóvão - SE

2020

LEONARDO ANDRADE BISPO SILVA

**MODELO DE DANO CONCENTRADO APLICADO À FLAMBAGEM LOCAL EM
PERFIS VAZADOS DE AÇO ESTRUTURAL SUBMETIDOS À FLEXÃO
COMPOSTA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil como requisito à obtenção do título de mestre em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim

Coorientador: Prof. Dr. Higor Sérgio Dantas de Argôlo

São Cristóvão - SE

2020

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S586m Silva, Leonardo Andrade Bispo
Modelo de dano concentrado aplicado à flambagem local em perfis vazados de aço estrutural submetidos à flexão composta / Leonardo Andrade Bispo Silva ; orientador David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim. - São Cristóvão, 2020.
86 f. : il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe, 2020.

1. Engenharia civil. 2. Flambagem (Mecânica). 3. Aço - Estruturas. 4. Mecânica da fratura. I. Amorim, David Leonardo Nascimento de Figueiredo Orient. II. Título.

CDU 625



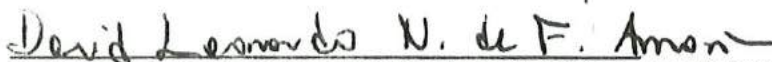
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

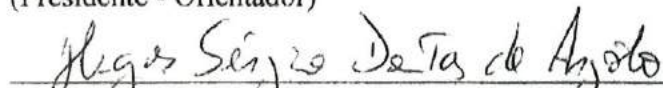
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos 31 (trinta e um) dias do mês de janeiro de 2020, às 14h00min (catorze horas), reuniram-se, no Mini auditório do PROEC na cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos", os membros da Comissão Examinadora, formada pelos professores doutores DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM (Orientador – PROEC/UFS), HIGOR SERGIO DANTAS DE ARGOLO (Examinador interno - PROEC/UFS), JULIO FLOREZ LOPEZ (Examinador externo à Instituição - UNILA) e RODRIGO RIBEIRO PACCOLA (Examinador Externo à Instituição - USP), para a realização da Defesa de Dissertação ao Mestrado do Trabalho intitulado "MODELO DE DANO CONCENTRADO APLICADO À FLAMBAGEM LOCAL EM PERFIS VAZADOS DE AÇO ESTRUTURAL SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA" do mestrando LEONARDO ANDRADE BISPO SILVA. Após a apresentação do candidato e a arguição dos membros da supracitada Comissão, o candidato foi considerado APROVADO. Não havendo nada mais a tratar, eu, DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM, presidente da Comissão, lavrei a presente ata, que será assinada por mim, pelo candidato e pelos demais membros da Comissão Examinadora. São Cristóvão, Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos", 31 de janeiro de 2020.




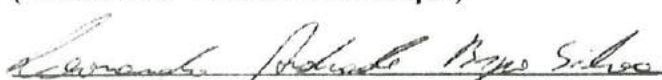
Prof.º Dr.º DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM
(Presidente - Orientador)



Prof.º Dr.º HIGOR SERGIO DANTAS DE ARGOLO
(Examinador – interno)


Prof.º Dr.º JULIO FLOREZ LOPEZ
(Examinador – externo à Instituição)


Prof.º Dr.º RODRIGO RIBEIRO PACCOLA
(Examinador – externo à Instituição)


Eng.º LEONARDO ANDRADE BISPO SILVA
(Candidato)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por sempre abençoar e proteger minha família e a mim.

Aos meus pais, João Andrade e Maria do Carmo, pelo amor incondicional, educação, sacrifícios e apoio em todos momentos da minha vida. Vocês são as minhas grandes referências.

Às minhas irmãs, Dayse e Regina, pelo incentivo, ajuda e torcida.

À minha namorada, Luíza, pelo amor, amizade, companheirismo, apoio e incentivo. Saiba que eu me sinto mais forte com você, pronto para enfrentar qualquer desafio.

Aos amigos do mestrado, João Marcos, Adysson, Maic, Antônio Gabriel e Daniel.

A todos os professores que já passaram em minha vida, desde o ensino fundamental até os do PROEC, através dos quais tive a oportunidade de adquirir valiosos conhecimentos que levarei para a vida. Em especial, gostaria de agradecer ao meu orientador e coorientador, professores David e Higor, pela oportunidade, conselhos, amizade, atenção e disponibilidade.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente na elaboração deste trabalho.

“As invenções são, sobretudo, o resultado de um trabalho teimoso”

Alberto Santos Dumont

RESUMO

A procura em reduzir custos na engenharia faz com que sejam desenvolvidos novos materiais e concepções de projeto que buscam estruturas mais leves e arrojadas. Desta forma, os grandes avanços nos processos de fabricação levam a utilização mais frequente de perfis metálicos com espessuras reduzidas e elevada tensão de escoamento. Consequentemente, ao utilizar peças estruturais com seções transversais compostas por placas esbeltas, o fenômeno de instabilidade local fica mais evidente e é usualmente tratado como uma forma de colapso. Como o tratamento matemático convencional do comportamento da estrutura quanto a flambagem local exige soluções trabalhosas e refinadas, costuma-se empregar o método dos elementos finitos em sua formulação clássica utilizando malhas com vários elementos de casca ou tridimensionais, o que acarreta no aumento do custo computacional. Por outro lado, uma teoria não linear recente, denominada de Mecânica do Dano Concentrado (MDC), foi introduzida para obter resultados mais realistas e eficientes na análise de estruturas mais complexas. Na MDC assume-se que todos os efeitos não lineares de um elemento finito estão concentrados em rótulas plásticas, o que reduz significativamente o custo computacional da análise. Por conta disto, o presente trabalho buscou elaborar modelos numéricos via MDC aplicados à flambagem local em perfis vazados de aço submetidos à flexão composta. Na formulação do modelo, é necessário inserir valores de alguns parâmetros obtidos experimentalmente, como: rotação plástica crítica e a inclinação da reta de evolução do dano. Neste trabalho foram propostos dois modelos numéricos, com equações baseadas em Yamada et al. (1993, 2012) e AISC (2016) para calcular analiticamente esses parâmetros e o momento último. Para avaliar a precisão dos modelos, os resultados numéricos foram comparados com seis experimentos de Kazuya (2017), em que perfis formados a frio de seção quadrada vazada foram submetidos à força de compressão axial e um carregamento de momento fletor monotônico. Ao analisar os resultados, foi possível concluir que os resultados do modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) mostraram-se satisfatórios, enquanto o modelo baseado na AISC (2016) possuiu momentos últimos conservadores quando comparados aos experimentais.

Palavras-chave: Flambagem local. Perfil vazado de aço estrutural. Mecânica do Dano Concentrado. Flexão composta.

ABSTRACT

The quest to reduce engineering costs leads to the development of new materials and design concepts that seek lighter and more daring structures. In this way, the great advances in the manufacturing processes lead to the more frequent use of metal profiles with reduced thicknesses and high yield stress. Therefore, the use of structural parts with transverse sections composed of thin plates turn the phenomenon of local instability more evident and it is usually treat as a form of collapse. Since the mathematical modeling of the structure's behavior in relation to local buckling requires laborious and refined solutions, the finite element method is use in its classical formulation using meshes with several elements, resulting in an increase in computational cost. On the other hand, a recent nonlinear theory called Lumped Damage Mechanics (LDM) was introduced to obtain more realistic and efficient results in the analysis of more complex structures. In LDM theory, it is assumed that all the nonlinear effects of a finite element are concentrated on plastic hinges, which significantly reduces the computational cost of the analysis. As a result, the present work seeks to develop numerical models, using LDM, applied to local buckling in hollow section profiles subjected to bending and axial forces. In the model formulation it is necessary to insert values of some experimentally obtained parameters, such as the critical plastic rotation and the slope of the damage evolution line. In this work two numerical models were proposed, with equations based on Yamada et al. (1993, 2012) and AISC (2016), to analytically calculate those parameters and the last moment. To evaluate the accuracy of the models, the numerical results were compared with six experiments by Kazuya (2017), in which rectangular hollow section columns were submitted to axial compression force and a monotonic bending moment loading. Analyzing the results it is possible to conclude that the results of the model based on Yamada et al. (1993, 2012) were satisfactory, while the model based on AISC (2016) had conservative last moments when compared to the experimental ones.

Keywords: Local buckling. Steel hollow section profiles. Lumped Damage Mechanics. Bending and axial forces

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Largura efetiva e coeficientes de flambagem local para elementos AA	24
Tabela 2 – Coeficiente de flambagem local k_c para a seção completa em barras sob compressão centrada.....	25
Tabela 3 - Coeficiente de flambagem local k_c para a seção completa em barras sob flexão simples em torno do eixo de maior inércia.....	26
Tabela 4 – Limite de esbeltez para barras submetidas à força axial de compressão.....	28
Tabela 5 – Limites de esbeltez para barras submetidas à flexão	29
Tabela 6 – Valores dos parâmetros mantidos constantes	50
Tabela 7 – Propriedades do material	61
Tabela 8 – Resultados do ensaio de compressão axial monotônico	62
Tabela 9 – Dimensões geométricas das seções transversais	65
Tabela 10 – Resultados experimentais	66
Tabela 11 – Dados de entrada utilizados no programa.....	69
Tabela 12 – Classificação das seções transversais de acordo com a AISC (2016)	69
Tabela 13 – Comparação entre os valores numéricos e experimentais de θ_u	76
Tabela 14 – Comparação entre os valores numéricos de M_u e experimentais de M_{max}	76

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Analogia da bola rígida para diagramas de bifurcação	5
Figura 2 – Flambagem local de perfil retangular vazado	6
Figura 3 - Comportamento pós flambagem de placas esbeltas	7
Figura 4 – Efeito das imperfeições iniciais no comportamento de placas.....	8
Figura 5 – Distribuição de tensões residuais em perfis de seção quadrada vazada.....	8
Figura 6 - Diagrama momento-curvatura	10
Figura 7 – Diagrama tensão x deformação elastoplástico trilinear	11
Figura 8 – Diagrama tensão x deformação elastoplástico exponencial.....	12
Figura 9 – Velocidade de transição entre f_y e f_u com o parâmetro β	12
Figura 10 - Típica relação tensão-deformação de ensaios de compressão axial monotônico de coluna curta.....	13
Figura 11 – Relação entre μ_0 e $1/\alpha$ de perfis de aço formados a frio	14
Figura 12 – Placa comprimida idealizada.....	15
Figura 13 – Curvas de k_c para diferentes valores de μ	18
Figura 14 – Curvas de k_c para diferentes situações de apoio	19
Figura 15 – Curva σ em relação a esbeltez da placa (b/t).....	20
Figura 16 – Estágios do comportamento da placa com bordas apoiadas submetida à compressão uniforme	22
Figura 17 – Largura efetiva de placas apoiadas em ambas as bordas longitudinais	23
Figura 18 – Seções transversais analisadas por Hancock et al., 1994	27
Figura 19 – Comportamento de vigas com seções compacta, não compacta e esbelta.....	29
Figura 20 – Curvas de interação: AISC (2016), W8x31, média aproximada para perfis I	32
Figura 21 – Curvas de interação: AISC (2016), perfis retangular e circular sólidos	33
Figura 22 – Elemento de volume representativo (EVR)	35
Figura 23 – Caracterização da flambagem local em um elemento metálico e respectivo modelo de dano concentrado	37
Figura 24 – Fluxograma das etapas de análise do modelo de dano concentrado	38
Figura 25 – (a) Pórtico plano e deslocamentos generalizados do nó i ; (b) deformações generalizadas do elemento b entre os nós i e j	38
Figura 26 – Formas de deformações do elemento b de acordo com os sinais das rotações relativas.....	40
Figura 27 – (a) Forças externas aplicadas ao pórtico plano; (b) esforços generalizados do elemento b	42
Figura 28 – (a) Ensaio em perfil metálico com seção transversal retangular vazada; (b) Comportamento do elemento durante o ensaio monotônico	45
Figura 29 – Domínio elástico para uma seção transversal retangular	45

Figura 30 – Variação do módulo de elasticidade com dano.....	47
Figura 31 – Curva dano de flambagem local x Rotação plástica	48
Figura 32 – Gráfico momento fletor x rotação	48
Figura 33 – Malha de elementos finitos para o modelo de dano concentrado	50
Figura 34 – Comportamento da curva M versus θ para diferentes valores de p_{cr}	51
Figura 35 – Comportamento da curva Dano versus ϕp para diferentes valores de p_{cr}	52
Figura 36 - Comportamento da curva M versus θ para diferentes valores de k_m	52
Figura 37 - Comportamento da curva Dano versus ϕp para diferentes valores de k_m	53
Figura 38 - Comportamento da curva M versus θ para diferentes valores de M_u	53
Figura 39 - - Comportamento da curva Dano versus ϕp para diferentes valores de M_u	54
Figura 40 – Relação entre a rotação de escoamento (θ_y) e última (θ_u) do nó	54
Figura 41 - Diagrama das rotinas implementadas no modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012).....	56
Figura 42 - Diagrama das rotinas implementadas no modelo baseado na AISC (2016).....	59
Figura 43 – Visão geral do corpo de prova	60
Figura 44 – Relação tensão - deformação	61
Figura 45 – Desenho esquemático do ensaio de compressão axial monotônico	62
Figura 46 – Diagrama carga – deslocamento do ensaio de compressão axial monotônico.....	62
Figura 47 – Desenho esquemático das posições dos medidores de deslocamentos e extensômetros	63
Figura 48 – Condições de contorno e vista em planta baixa do ensaio experimental	64
Figura 49 – Relação entre momento e rotação dos resultados experimentais	67
Figura 50 – Deformação após o carregamento	68
Figura 51 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 1 de Kazuya (2017).....	70
Figura 52 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 2 de Kazuya (2017).....	71
Figura 53 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 5 de Kazuya (2017).....	72
Figura 54 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 6 de Kazuya (2017).....	73
Figura 55 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 9 de Kazuya (2017).....	74
Figura 56 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 14 de Kazuya (2017)....	75

LISTA DE SÍMBOLOS

$w(x, y)$	Deslocamento perpendicular ao plano da placa
w_0	Imperfeições geométricas iniciais da placa
W_c	Módulo elástico da seção
W_e	Módulo elástico efetivo da seção
Z_p	Módulo plástico da seção
a	Comprimento da placa
b	Largura da placa
b'	Largura interna da seção transversal do perfil
b_{ef}	Largura efetiva
b_f	Largura da mesa
b_w	Largura da alma
t	Espessura da placa
t_b	Espessura nominal
t_f	Espessura da mesa
t_w	Espessura da alma
h	Altura da alma
C_m	Efeito do gradiente de momento
$Y.R.$	Proporção da tensão de escoamento com a última
X, Y, Z	Eixos das coordenadas globais
α	Razão largura e espessura normalizada

α_b	Ângulo de inclinação entre o eixo do elemento finito b e o sistema de coordenadas de referência
$a_{\mu\eta}$	Amplitude máxima de deslocamento de cada modo de flambagem
β	Grau de não linearidade da relação tensão-deformação
ΔT	Trabalho realizado pelas forças externas no plano médio
ΔU	Energia de deformação de flexão da placa
ξ	Fator de plastificação
λ_p	Índice de esbeltez reduzido
F	Função de tensão de Airy
F_a	Tensões axial admissível
F_b	Tensões de flexão admissível
D	Rigidez da placa
f_y	Tensão de escoamento do aço
f_u	Tensão limite de resistência
f_t	Tensão do ponto de transição da rigidez no intervalo de deterioração
ν	Coefficiente de Poisson
μ	Número de semi ondas que aparecem durante a flambagem na direção X
μ_0	Fator de ductilidade da deformação
η	Número de semi ondas que aparecem durante a flambagem na direção Y
n_y	Razão de força axial
k_c	Coefficiente de flambagem

$\left(\frac{b}{t}\right)$	Esbeltez da placa
$\left(\frac{b}{t}\right)_{lim}$	Esbeltez limite para flambagem local da placa
E	Módulo de elasticidade de Young
E_{d1}	Rigidez negativa da primeira parte do intervalo de deterioração
E_{d2}	Rigidez negativa da segunda parte do intervalo de deterioração
E_{d3}	Rigidez negativa da terceira parte do intervalo de deterioração
E_t	Módulo de elasticidade tangente
\bar{E}	Módulo de elasticidade efetivo do material danificado
ξE	Módulo de elasticidade reduzido
R_{pg}	Fator de redução de resistência à flexão
A	Área total do plano do elemento de volume representativo
A_D	Área correspondente aos micro defeitos
\tilde{A}	Área efetiva do plano do elemento de volume representativo
i_x	Raio de giração no eixo X
I	Momento de inércia da seção transversal
AE	Rigidez axial
EI	Rigidez à flexão
\vec{n}	Vetor normal ao plano
L	Comprimento da amostra
L_b	Comprimento do elemento b

d	Dano
σ	Tensão de Cauchy
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
σ_{cri}	Tensão crítica
f_a	Força axial
f_b	Momento de flexão
f_i, f_j	Função de escoamento das rótulas inelásticas i e j
λ	Esbeltez do corpo de prova
λ_i, λ_j	Multiplicadores plásticos das rótulas inelásticas i e j
ε_0	Deformação residual
ε	Deformação total
ε_u	Deformação correspondente à tensão limite de resistência
ε^e	Deformação elástica
ε^p	Deformação plástica
ε^d	Deformação devido a danificação
p_{cr}	Rotação plástica crítica que inicia a flambagem local
k_m	Inclinação da reta de evolução do dano
m	Momentos fletores aplicados
m_i, m_j	Momentos fletores generalizados nos nós i e j
N	Força de compressão axial

N_y	Força axial de escoamento
sN_y	Valor médio da força axial de escoamento
N_l	Força axial de flambagem local elástica
N_n	Resistência axial nominal de tração ou de compressão
N_S	Força axial solicitante de tração ou de compressão
N_{Sd}	Força axial solicitante de cálculo de tração ou de compressão
N_{Rd}	Força axial resistente de cálculo de tração ou de compressão
N_x	Força de compressão uniformemente distribuída na direção X
$N_{x,cri}$	Força mínima de compressão uniformemente distribuída na direção X
M_l	Momento fletor de flambagem local elástica
M_n	Resistência à flexão nominal
M_p	Momento de plastificação total
M_y	Momento de escoamento
M_u	Momento último
M_{max}	Momento máximo de flexão
M_{res}	Momento fletor resistente
$M_{x,S}$	Momento fletor solicitante no eixo X
$M_{x,Sd}$	Momento fletor solicitante de cálculo no eixo X
$M_{x,n}$	Momento fletor resistente nominal no eixo X
$M_{x,Rd}$	Momento fletor resistente de cálculo no eixo X

$M_{y,S}$	Momento fletor solicitante no eixo Y
$M_{y,Sd}$	Momento fletor solicitante de cálculo no eixo Y
$M_{y,n}$	Momento fletor resistente nominal no eixo Y
$M_{y,Rd}$	Momento fletor resistente de cálculo no eixo Y
d_i, d_j	Variável de dano nas rótulas inelásticas i e j
u_i	Deslocamento na direção do eixo X
w_i	Deslocamento na direção do eixo Z
θ_i	Rotação do nó i em relação a configuração inicial
θ_y	Rotação de escoamento
θ_u	Rotação última onde inicia-se a flambagem local
θ_{final}	Rotação final em que o ensaio é finalizado
ϕ_i^b, ϕ_j^b	Rotações generalizadas nos nós i e j do elemento b
ϕ_i^p, ϕ_j^p	Rotações plásticas nas rótulas inelásticas i e j
δ_b	Alongamento ou encurtamento generalizados do elemento b
W_{def}^*	Trabalho virtual de deformação
W_{ine}^*	Trabalho virtual das forças inerciais
W_{ext}^*	Trabalho virtual externo
$\{P\}$	Matriz de forças nodais generalizadas externas
$\{M\}_b$	Matriz de esforços generalizados
$\{u\}_i$	Deslocamentos generalizados do nó i

$\{q\}_b$	Matriz de deslocamentos nodais generalizados
$\{U\}$	Matriz de deslocamentos nodais generalizados
$\{\Phi\}_b$	Matriz de deformações generalizadas
$\{\Phi^e\}_b$	Matriz de deformações generalizadas elástica
$\{\Phi^p\}_b$	Matriz de deformação plástica
$\{\Phi^d\}_b$	Matriz de deformação do dano
$[B(q)]_b$	Matriz de transformação cinemática da configuração inicial
$[B_E^0]_b$	Matriz de transformação cinemática acrescida de zeros na configuração inicial
$[F(D)]_b$	Matriz de flexibilidade do elemento danificado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos.....	3
1.1.1	Objetivo geral	3
1.1.2	Objetivos específicos.....	3
1.2	Metodologia.....	3
2	FLAMBAGEM LOCAL	5
2.1	Imperfeições geométricas iniciais.....	7
2.2	Tensões residuais	8
2.3	Não linearidade do material	10
2.4	Teoria da flambagem de placas finas.....	15
2.5	Critérios da NBR 14762:2010 para perfis de seção retangular vazada.....	21
2.5.1	Método da largura efetiva (MLE).....	21
2.5.2	Método da seção efetiva (MSE)	25
2.5.3	Método da resistência direta (MRD)	26
2.5.4	Barras submetidas à flexão composta.....	27
2.6	Critérios da AISC 360:2016 para perfis de seção retangular vazada.....	28
2.6.1	Flambagem local da mesa.....	30
2.6.2	Flambagem local da alma	30
2.6.3	Barras submetidas à flexão composta.....	31
3	MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO	34
3.1	Conceitos iniciais	37
3.2	Cinemática de pórticos planos.....	38
3.3	Equação de equilíbrio.....	41
3.4	Lei constitutiva para pórticos planos rotulados	43
3.5	Lei de plasticidade	44
3.6	Lei de evolução da flambagem local	47
4	MODELOS DE DANO CONCENTRADO PROPOSTOS	49
4.1	Análise paramétrica	50
4.2	Modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012)	54
4.3	Modelo baseado na AISC (2016)	57
5	EXPERIMENTOS DE KAZUYA (2017)	60
5.1	Propriedades do material.....	60
5.2	Ensaio experimental	63
5.3	Resultados experimentais	65

6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	69
7	CONCLUSÃO.....	77
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	78
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

A redução de custos na engenharia é um fator essencial para a viabilidade de uma construção. Assim, novos materiais e concepções de projeto são desenvolvidos a fim de obter estruturas mais leves e arrojadas. Com estes grandes avanços nos processos de fabricação, torna-se mais frequente a utilização de perfis metálicos com espessuras reduzidas e elevada tensão de escoamento.

Devido ao uso de estruturas com seções transversais compostas por placas esbeltas, o fenômeno de instabilidade local fica mais evidente e é usualmente tratado como uma forma de colapso. Desde então, diversas pesquisas teóricas e experimentais têm sido desenvolvidas com o objetivo de descrever e compreender o problema de flambagem local, assim como uma formulação de soluções que considere todos os fatores que afetam o fenômeno.

A ocorrência de flambagem local tem efeito imediato de redução de rigidez. No entanto, o comportamento pós crítico apresenta uma reserva de resistência que deve ser levada em consideração. Os fatores que influenciam a flambagem local são: condições de contorno em deslocamento, esbeltez da placa, imperfeições geométricas iniciais, tensões residuais e os efeitos de plasticidade do material.

Em regiões sujeitas a abalos sísmicos, os perfis metálicos de seção quadrada vazada são amplamente utilizados como pilares, por possuir resistência e rigidez iguais nas duas direções. Na prática, todo pilar de aço de canto ou extremidade, com ligações rígidas ou semirrígidas, está submetido a uma força normal de compressão e a momentos fletores concomitantes em uma ou nas duas direções, ou seja, a uma flexão composta.

De modo geral, na avaliação do desempenho sísmico de edifícios, os testes de carregamentos cíclicos são conduzidos com cargas axiais fixas e protocolos de carregamento de momentos fletores de tipo padrão, com amplitudes incrementais ou constantes (YAMADA et al., 2018). Dentro deste contexto, nota-se a importância do estudo do comportamento de perfis de aço submetidos à flexão composta, seja ela monotônica ou cíclica.

O tratamento matemático do comportamento da flambagem local exige soluções trabalhosas e refinadas, o que conduz ao emprego de métodos numéricos associados a teorias não lineares. Usualmente, emprega-se a formulação clássica em elementos finitos com não linearidade geométrica e associada à teoria geral da plasticidade. Estas análises costumam usar malhas refinadas, ocasionando um elevado custo computacional.

Por outro lado, uma teoria não linear recente, denominada de Mecânica do Dano Concentrado (MDC), foi introduzida no início dos anos noventa para obter resultados mais realistas e eficientes na análise de estruturas mais complexas. Na MDC assume-se que todos os efeitos não lineares de um elemento finito estão concentrados em rótulas plásticas. Esta simplificação reduz significativamente o custo computacional da análise, o que viabiliza sua aplicação em diversos problemas práticos de engenharia.

Apesar de simples, a modelagem utilizada na MDC é eficiente e com resultados tão bons quanto os modelos mais complexos e refinados. A MDC já foi satisfatoriamente aplicada na análise de pórticos planos (FLÓREZ-LÓPEZ, 1993, 1995; CIPOLLINA et al., 1995; RAJASANKAR et al., 2009) e de pórticos espaciais (MARANTE e FLÓREZ-LÓPEZ, 2003) de concreto armado, também considerando-se fissuração devido ao cisalhamento em elementos de concreto armado (PERDOMO et al., 2013), na análise da flambagem local em perfis metálicos tubulares e de seção quadrada vazada sob flexão simples (INGLESSIS et al., 1999; FEBRES et al., 2003; GUERRERO et al., 2007, 2009), aplicação da teoria em arcos (AMORIM et al., 2013) e túneis (AMORIM et al., 2014; AMORIM, 2016) de concreto, avaliação de fissuras em vigas (BAI et al., 2016) e conectores entre vigas de aço (BAI et al., 2017) submetidas a fadiga de baixo ciclo, na estimativa da rigidez à flexão em vigas de concreto (UCHOA, 2017), em fadiga de pórticos planos (BAZÁN, 2017; BAZÁN et al., 2019), na modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras (COELHO, 2017), análise de localização de deformações em problemas planos (AMORIM et al., 2018) e na avaliação do impacto de sismicidade induzida em estruturas de concreto armado (SILVA et al., 2018).

Portanto, apesar das diversas aplicações já desenvolvidas para problemas estruturais, o presente trabalho procura contribuir para as pesquisas neste tema ao incluir a influência da carga axial na modelagem via MDC aplicado à flambagem local em perfis vazados de aço estrutural. Desta forma, a flambagem local é representada por uma variável interna denominada de dano, que possui valores entre zero (elemento intacto) e um (elemento totalmente danificado). O comportamento inelástico do fenômeno é obtido através da hipótese de equivalência em deformações da mecânica do dano contínuo. Leis de evolução de dano são inseridas no modelo numérico para levar em conta o desenvolvimento da flambagem local no elemento.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Elaborar modelo de dano concentrado aplicado à flambagem local em perfis vazados de aço estrutural submetidos à flexão composta.

1.1.2 Objetivos específicos

- Descrever a análise teórica de flambagem em placas finas e as considerações da NBR 14762:2010 e AISC 360:2016 para perfis formados a frio com seção retangular vazada;
- Adicionar no modelo numérico equações baseadas na literatura que possam calcular analiticamente alguns parâmetros que são obtidos experimentalmente;
- Analisar o comportamento da flambagem local em perfis formados a frio com seção quadrada vazada submetidos à força de compressão axial e momento de flexão monotônico;
- Comparar os resultados numéricos com os experimentais de Kazuya (2017).

1.2 Metodologia

Inicialmente, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre flambagem local, onde foram abordados os principais fatores que influenciam o fenômeno e a análise teórica da flambagem local em placas finas, método que fundamenta os critérios utilizados na NBR 14762:2010. Além disso, foram apresentados os critérios da AISC 360:2016 para perfis de seção retangular vazada.

Posteriormente, foram apresentados os conceitos e considerações da Mecânica do Dano Concentrado com a descrição das etapas necessárias para elaborar o modelo numérico, em que as tensões, deformações, rotações e os valores de dano são calculados por meio de equações cinemáticas, equilíbrio e leis constitutivas, sendo que a última considera leis de evolução do dano e da deformação plástica.

Os fenômenos de plastificação da estrutura metálica e a descontinuidade devido a flambagem local são concentrados nas extremidades do elemento. A plastificação é representada pela formação de uma rótula plástica, enquanto a flambagem local é descrita por variáveis de dano acrescentadas à rótula.

Na formulação do modelo, é necessário inserir valores de alguns parâmetros que são obtidos experimentalmente, como: rotação plástica crítica (p_{cr}) e a inclinação da reta de evolução do dano (k_m). Diante disto, este trabalho propôs adicionar no modelo de dano

concentrado equações baseadas em Yamada et al. (1993, 2012) e AISC (2016) de forma que esses parâmetros possam ser calculados analiticamente.

No capítulo 4 deste trabalho, foram propostos dois modelos de dano concentrado, um baseado em Yamada et al. (1993, 2012) e o outro na AISC (2016). Para o cálculo da rotação em que se inicia a flambagem local, os modelos utilizaram a equação do fator de ductilidade de deformação de Yamada et al. (1993), obtida através de análise de regressão de resultados experimentais de perfis de aço formados a frio com seção quadrada vazada.

A diferença entre os dois modelos são as equações de escoamento e momento último. O modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) considerou a equação de Yamada (2012) que relaciona o valor do momento de escoamento com o último. Já o modelo baseado na AISC (2016), considera as expressões, indicadas por esta norma, de interação e momento plástico para perfis com mesas e almas compactas.

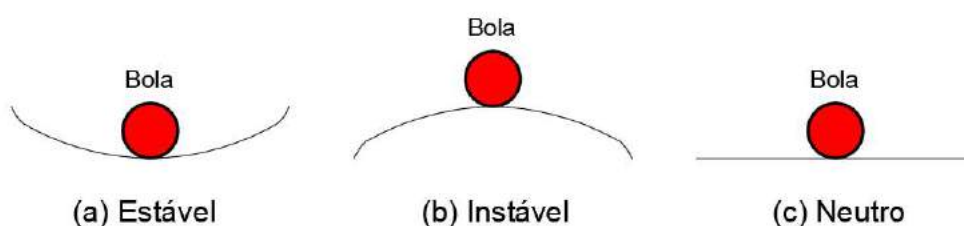
A última etapa consistiu na avaliação da precisão dos modelos numéricos, em que os resultados destes foram comparados com os experimentais de Kazuya (2017), apresentados no capítulo 5 deste trabalho. Analisaram-se seis experimentos, em que perfis formados a frio de seção quadrada vazada foram submetidos à força de compressão axial e um carregamento de momento fletor monotônico. Desses seis experimentos, metade tiveram o modo de colapso determinado por flambagem local e a outra metade foi devido à não linearidade geométrica junto com flambagem local.

2 FLAMBAGEM LOCAL

Estabilidade é um conceito que está relacionado com a capacidade de uma estrutura conseguir estabelecer uma posição de equilíbrio após uma perturbação externa, como por exemplo, a aplicação de uma força ou a imposição de um deslocamento (ZIEMIAN, 2010).

O conceito de estabilidade é frequentemente explicado por analogia ao comportamento de uma bola rígida colocada em diferentes superfícies, como mostra a Figura 1. Se ao cessar a perturbação externa, a estrutura retornar à configuração inicial, diz-se que ela apresenta equilíbrio estável. Por outro lado, caso ela não consiga mais retornar à sua posição inicial, ela apresenta equilíbrio instável. No entanto, se atingir uma nova posição deformada, e conseguir manter-se equilibrada, a estrutura apresenta equilíbrio neutro (GAMBHIR, 2004).

Figura 1 – Analogia da bola rígida para diagramas de bifurcação



Fonte: Adaptado de GAMBHIR (2004)

Segundo Silva (2006), a posição de equilíbrio neutro normalmente corresponde a uma posição de transição entre o equilíbrio estável e o instável, onde a aplicação de alguma nova perturbação adicional implica em aceleração na passagem para o equilíbrio instável.

Para Gambhir (2004), existem dois tipos de falhas associadas a uma estrutura, falha de material e falha na forma ou configuração. No primeiro caso, as tensões excedem os valores admissíveis que podem resultar na formação de fissuras. Já no segundo, mesmo que as tensões estejam dentro da faixa permitida, a estrutura é incapaz de manter sua configuração projetada sob uma perturbação externa.

Diante disso, a perda de estabilidade devido às cargas de tração está na categoria de falha de material, enquanto que a perda de estabilidade sob carga compressiva, além da categoria de falha de material, pode estar na de instabilidade estrutural ou geométrica, também conhecida como flambagem. Ressalta-se que esta falha é potencialmente perigosa e pode desencadear o colapso de diversos tipos de estruturas de engenharia.

Segundo Silva (2006), flambagem local pode ser definida pela mudança na forma da estrutura, com o aparecimento de grandes deslocamentos transversais decorrentes de pequenas variações no carregamento, sem o deslocamento ou mudanças de ângulos das arestas de encontros das placas do perfil, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Flambagem local de perfil retangular vazado



Fonte: Guerrero et al. (2007)

A ocorrência da flambagem local tem efeito imediato de redução de rigidez (RHODES e HARVEY, 1977). Entretanto, as placas esbeltas apresentam comportamento pós crítico estável, com reserva de resistência que deve ser levada em consideração, que pode ser maior que a carga crítica (SARMANHO, 1991; ZEIMAN, 2010).

As normas e especificações de cálculo e projeto, consideram o efeito da flambagem local pela análise indireta da instabilidade das placas. Diante disto, a redução da capacidade resistente é considerada como uma combinação das perdas isoladas de cada placa constituinte da seção, sem considerar com maior rigor a influência das condições de contorno das placas. Para a consideração do comportamento de pós flambagem, normalmente é utilizado o método da largura efetiva e as não linearidades que afetam esse comportamento são aproximadas (SILVA, 2006).

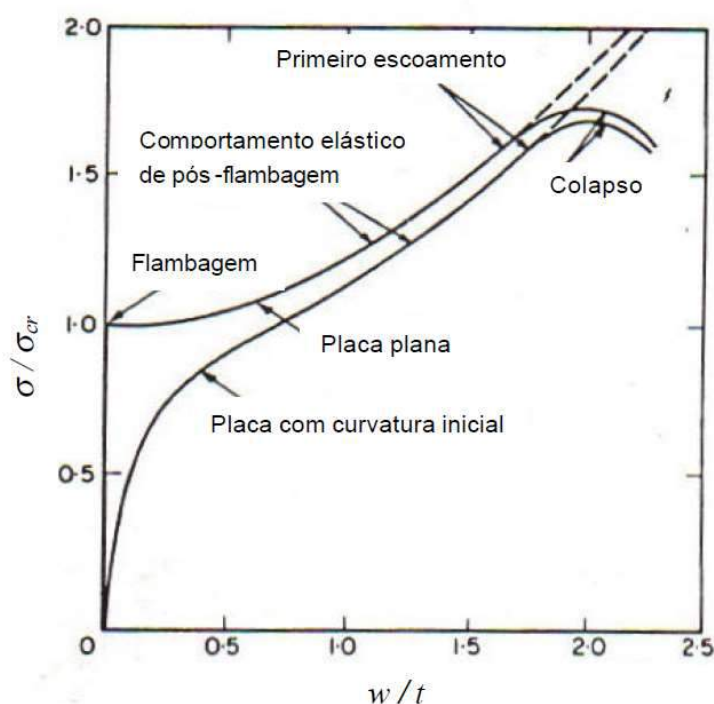
Segundo Salmon et al. (2009), os fatores que influenciam a flambagem local são: tipo de apoio, esbeltez da placa, imperfeições geométricas iniciais, tensões residuais e os efeitos de plasticidade (não linearidades) do material.

2.1 Imperfeições geométricas iniciais

As placas reais não são perfeitamente planas, possuem pequena curvatura inicial que causa deslocamento transversal assim que são carregadas. Este deslocamento aumenta rapidamente ao chegar próximo à tensão crítica de flambagem elástica, e em seguida aproxima-se do comportamento de placas inicialmente planas, hipotéticas, próximo do primeiro escoamento e da tensão de colapso (SILVA, 2006).

A Figura 3 mostra esse comportamento, em que σ é a tensão atuante na placa, σ_{cri} é a tensão crítica de flambagem elástica, w é o deslocamento transversal perpendicular ao plano médio da placa e t é a espessura da placa.

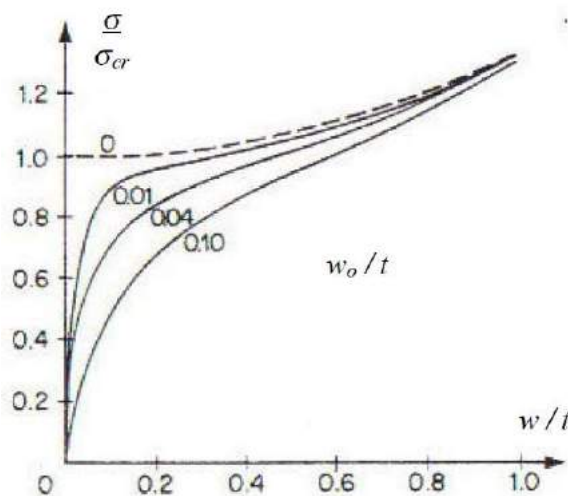
Figura 3 - Comportamento pós flambagem de placas esbeltas



Fonte: Trahair e Bradford (1988, apud Silva, 2006)

Segundo Maquoi (1992), quanto maior as imperfeições iniciais (w_0), maior será a perda de rigidez das placas. Entretanto, para grandes valores de deslocamentos (w), o comportamento praticamente não é influenciado pelo nível de imperfeições iniciais encontrados na prática, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 – Efeito das imperfeições iniciais no comportamento de placas



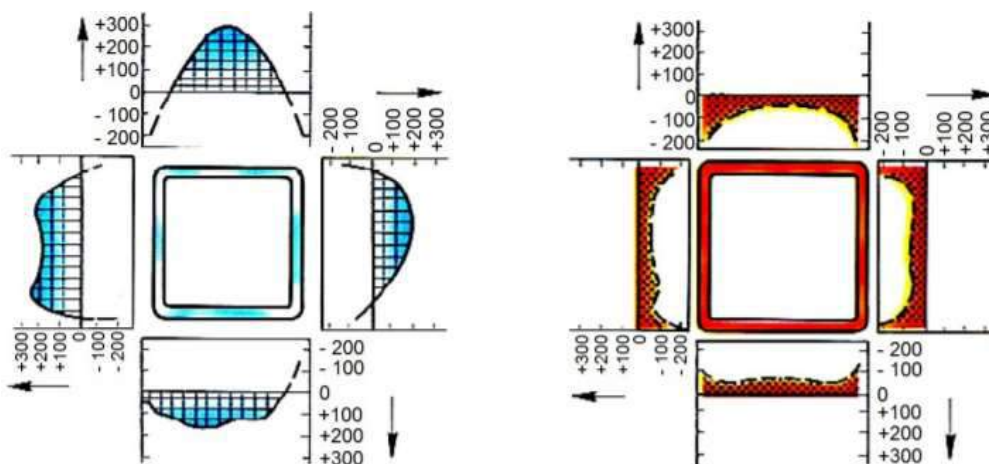
Fonte: Maquoi (1992)

2.2 Tensões residuais

Placas e perfis de aço estrutural possuem tensões residuais que resultam principalmente do resfriamento não uniforme após a laminação. Perfis soldados também apresentam tensões residuais de tração na vizinhança das soldas devido ao resfriamento do metal de solda (TALL, 1966; ALPSTEN e TALL, 1970; BJORHOVDE, 1972).

A Figura 5 mostra a distribuição de tensões residuais, em N/mm², em dois perfis de seção quadrada vazada, sendo o primeiro conformado a frio, de dimensões 160 x 160 x 6 mm e o segundo laminado a quente de 180 x 180 x 6,3 mm (VALLOUREC & MANNESMAN TUBES, 2002).

Figura 5 – Distribuição de tensões residuais em perfis de seção quadrada vazada



Fonte: Vallourec & Mannesman Tubes (2002)

A presença de tensões residuais térmicas tem um efeito considerável em fratura, fadiga, corrosão e na resistência à flambagem de seções estruturais de aço (SILVA, 2006).

As tensões residuais dependem das dimensões da seção transversal e de sua configuração, uma vez que esses fatores afetam as taxas de resfriamento, módulo de elasticidade, coeficiente de dilatação linear do material e o gradiente de temperatura (ZIEMIAN, 2010; TALL, 1966).

Devido à presença das tensões residuais, as fibras da seção transversal não podem ser consideradas com o mesmo nível de tensão sob ação de uma compressão uniforme (SALMON et al., 2009).

Segundo Silva (2006), em peças estruturais de material elastoplástico como o aço, dependendo de sua esbeltez, as tensões residuais podem causar escoamento prematuro ou flambagem prematura e reduzem a resistência última.

A equação (2.1) expressa a fórmula de Ramberg e Osgood (1941), modificada por Hill (1944) e por Van der Merwe (1987), que representa analiticamente a relação tensão-deformação de aços com tensões residuais (ARNEDO et al., 1998; BREDENKAMP et al., 1998).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{f_y} \right)^\beta \quad (2.1)$$

Onde ε é a deformação linear específica, σ é a tensão axial, E é o módulo de elasticidade, f_y é a tensão de escoamento do aço, tal que gera uma deformação residual (ε_0). Geralmente $\varepsilon_0 = 0,2\%$ (SANTOS, 2002). O parâmetro β caracteriza o grau de não linearidade da relação tensão-deformação do aço. Diferentes valores de β permitem reproduzir esta relação para outros tipos de metais (RONDAL, 1998).

O módulo tangente (equação (2.2)), obtido a partir da derivada da tensão (σ) em relação a deformação (ε) da equação (2.1) (BREDENKAMP et al., 1998), é utilizado para determinar resistência de peças solicitadas (SANTOS, 2002).

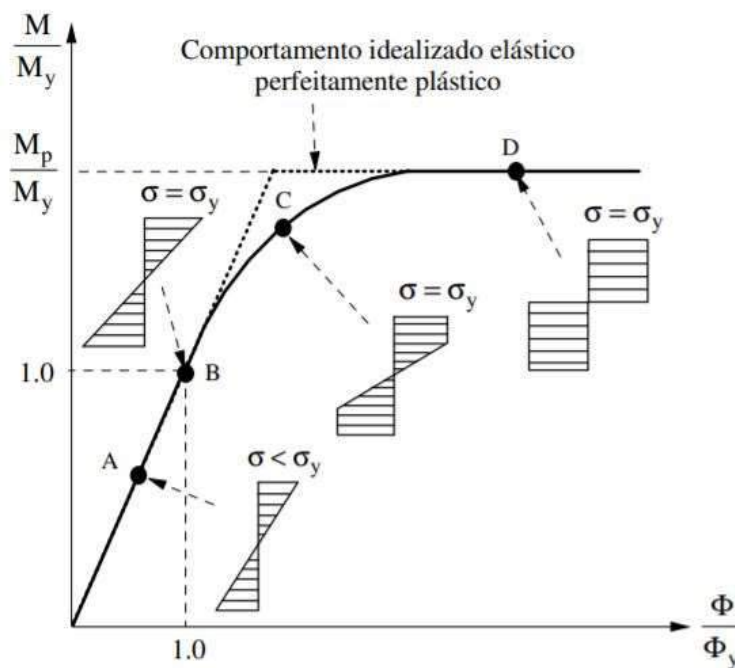
$$E_t = \frac{f_y \cdot E}{f_y + \varepsilon_0 \beta E \left(\frac{\sigma}{f_y} \right)^{\beta-1}} \quad (2.2)$$

2.3 Não linearidade do material

Segundo Silva (2006), as não linearidades do material (plasticidade) são influenciadas pelas tensões no plano das cargas e pelos componentes de tensão devidos à flexão da placa. Quanto maior a imperfeição inicial, mais cedo ocorre o início do escoamento e mais significativo é o efeito da plasticidade no modo de colapso. Consequentemente, a plasticidade prematura também causa uma redução na rigidez da placa e uma redução na carga de colapso.

A Figura 6 apresenta o comportamento da relação momento-curvatura de uma viga de aço biapoiada sob carga distribuída crescente. O diagrama ilustra os regimes elástico (A), elastoplástico (C) e plástico (D). O ponto B representa o início de escoamento da seção quando ocorre a plastificação das fibras externas, enquanto as demais se mantêm no regime elástico. Com o acréscimo do carregamento, outras fibras se plastificam enquanto uma parte da seção ainda se encontra no domínio elástico. Nesta condição, diz-se que a seção se encontra em regime elastoplástico. Esse processo continua até que toda a seção tenha sido plastificada. Dessa forma, a capacidade de momento ou momento plástico (M_p) da seção transversal foi atingida. Nesse ponto, a seção do meio do vão transforma-se em uma rótula plástica (SILVA e SILVA, 2008; PFEIL e PFEIL, 2009).

Figura 6 - Diagrama momento-curvatura

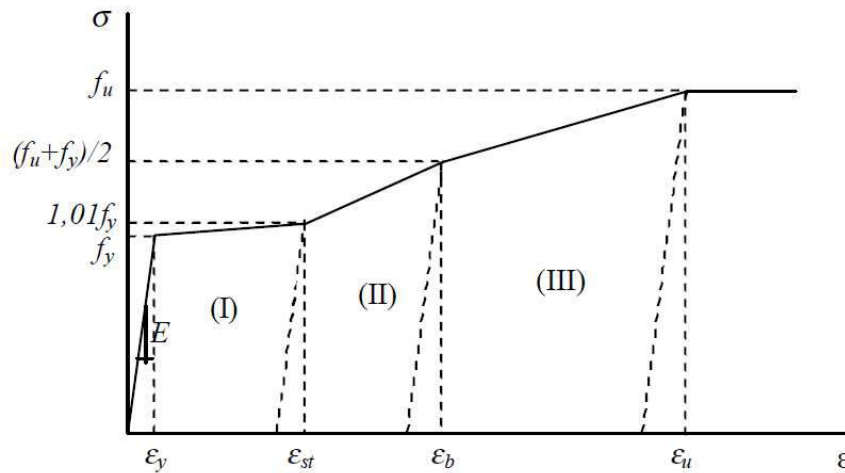


Fonte: SILVA (2009)

O regime elastoplástico é de difícil modelagem, para simplificar, as normas e especificações de projeto geralmente consideram apenas a primeira parte do diagrama (regime elástico), de modo que a tensão limite é a tensão de escoamento do material (f_y) (SILVA, 2006).

Para evitar essa simplificação, pode-se considerar o material com comportamento elastoplástico trilinear, adotado por Earls (1999), como mostra a Figura 7. O regime elástico é determinado pelo módulo de elasticidade (E) com tensão limite igual à tensão de escoamento (f_y). O comportamento plástico é definido por três regiões distintas, com as tensões limites para cada trecho, obtidas com base nos valores da tensão de escoamento (f_y) e tensão limite de resistência (f_u).

Figura 7 – Diagrama tensão x deformação elastoplástico trilinear

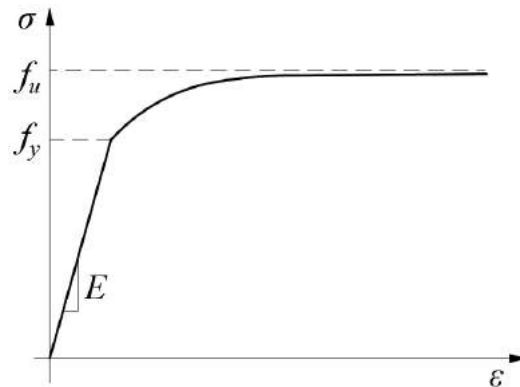


Fonte: Earls (1999, apud Silva, 2006)

Um modelo alternativo foi descrito para considerar o comportamento não linear do diagrama tensão-deformação. Neste modelo, equação (2.3), o limite elástico é igual a tensão de escoamento (f_y) no início do processo de plasticidade, onde a deformação plástica (ε^p) é igual a zero. Com os acréscimos de deformações plásticas, a tensão tenderá exponencialmente a tensão limite de resistência f_u , conforme Figura 8 (LEMAITRE e CHABOCHE, 1985).

$$\sigma = f_y + (f_u - f_y) \cdot (1 - e^{-\beta \cdot \varepsilon^p}) \quad (2.3)$$

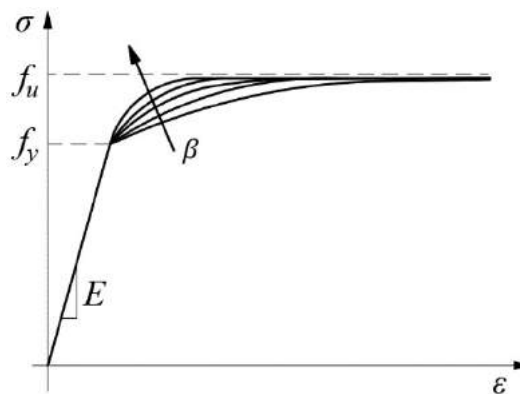
Figura 8 – Diagrama tensão x deformação elastoplástico exponencial



Fonte: Adaptado de Flórez-López et al. (2015)

A velocidade da transição entre (f_y) e (f_u) depende do valor da constante positiva (β), parâmetro que caracteriza o grau de não linearidade do material, como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Velocidade de transição entre f_y e f_u com o parâmetro β



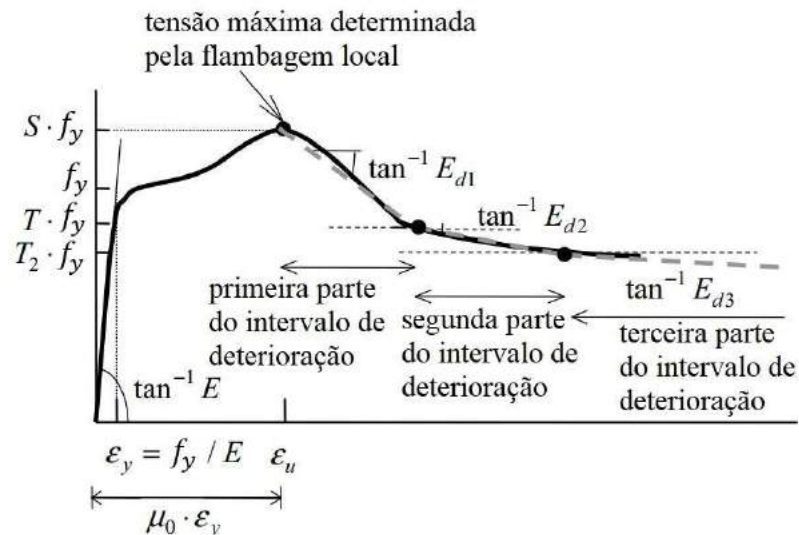
Fonte: Adaptado de Flórez-López et al. (2015)

Yamada et al. (1993) propuseram um método analítico empírico para prever o comportamento da curva tensão-deformação de perfis de aço formados a frio com seção quadrada vazada submetidos à flexão composta. Foram utilizados 40 resultados experimentais de compressão axial monotônico de coluna curta, sendo 36 de aço STKR400 e 4 de aço STKR490, com tensões de escoamento iguais a 400 MPa e 490 MPa, respectivamente. Neste ensaio, o comprimento da amostra foi três vezes a largura da seção transversal.

A Figura 10 mostra a típica curva de tensão-deformação dos ensaios experimentais, em que f_y é a tensão de escoamento, $f_u (= S \cdot f_y)$ é a tensão limite de resistência, $f_t (= T \cdot f_y)$ é a tensão do ponto de transição da rigidez no intervalo de deterioração, E é o módulo de Young, E_{d1} , E_{d2} e E_{d3} são, respectivamente, a rigidez negativa da primeira, segunda e terceira parte do

intervalo de deterioração, ε_y é a deformação elástica correspondente à tensão de escoamento, ε_u é a deformação correspondente à tensão limite de resistência e $\mu_0 (= \varepsilon_u/\varepsilon_y)$ é o fator de ductilidade da deformação (YAMADA et al., 2018).

Figura 10 - Típica relação tensão-deformação de ensaios de compressão axial monotônico de coluna curta



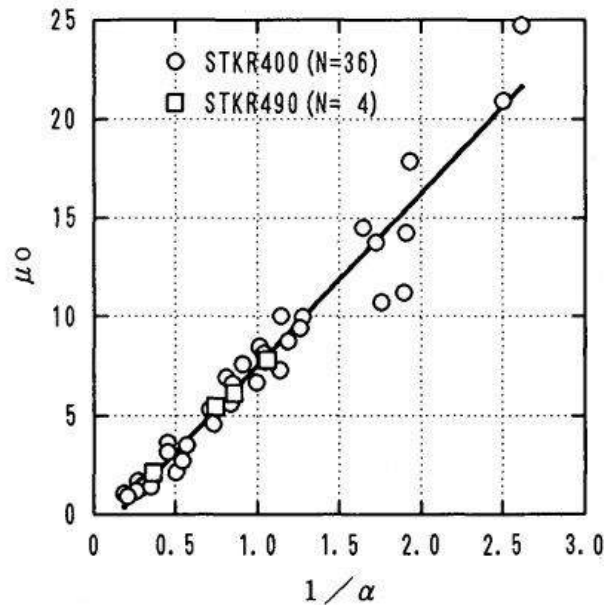
Fonte: Adaptado de Yamada et al. (2018)

Com base nos resultados experimentais, Yamada et al. (1993) realizaram uma análise de regressão, expressa pela equação (2.4), da relação entre o fator de ductilidade de deformação (μ_0) com a razão largura e espessura normalizada (α), equação (2.5), dos elementos de perfis de aço formados a frio com seção quadrada vazada, conforme Figura 11. O coeficiente de correlação da equação (2.4) é de 0,98.

$$\mu_0 = \frac{8,7}{\alpha} - 1,2 \quad (0,19 \leq 1/\alpha \leq 2,62) \quad (2.4)$$

$$\alpha = \varepsilon_y \cdot (b/t)^2 \quad (2.5)$$

Figura 11 – Relação entre μ_0 e $1/\alpha$ de perfis de aço formados a frio



Fonte: Yamada et al. (1993)

Para modelar a rigidez negativa da primeira e segunda parte do intervalo de deterioração após flambagem local, Yamada et al. (1993) propuseram as equações (2.6), (2.7) e (2.8), obtidas por análise de regressão dos resultados experimentais. Posteriormente, as equações (2.9) e (2.10) foram apresentadas por Yamada et al. (2012) para modelar a rigidez negativa da terceira parte do intervalo de deterioração.

$$E_{d1}/E = -0,014 \cdot \alpha^2 - 0,005 \quad (0,33 \leq \alpha \leq 3,14) \quad (2.6)$$

$$E_{d2}/E = -0,005 \quad (0,62 \leq \alpha \leq 3,70) \quad (2.7)$$

$$T/S = -0,079 \cdot \alpha + 0,81 \quad (0,62 \leq \alpha \leq 3,70) \quad (2.8)$$

$$E_{d3}/E = -0,001 \quad (2.9)$$

$$T_2/T = 0,90 \quad (2.10)$$

Além disso, Yamada et al. (2012) analisaram 28 resultados experimentais de Sadayoshi et al. (1984), Yamada et al. (1984; 1985; 1986), Kita e Tsuji (1991), Tai et al. (1998), Tsuda e Matsui (1998), Kurata et al. (2005), Akazawa et al. (2007), Shimada et al. (2007), Yamada e Shimada (2010) e Ishida et al. (2010) que utilizaram perfis formados a frio com seção quadrada vazada submetidos à força axial constante e diversos tipos de carregamentos cíclicos de flexão.

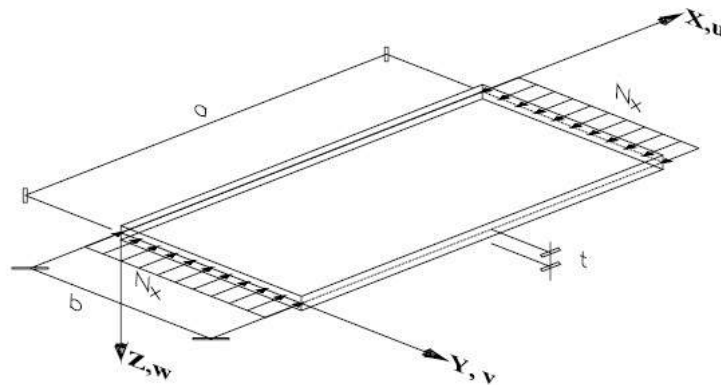
Dessa forma, Yamada et al. (2012) realizaram estudos estatísticos e propuseram a equação (2.11) que relaciona o momento último (M_u) e o momento de escoamento (M_y).

$$M_y/M_u = 0,6 \quad (2.11)$$

2.4 Teoria da flambagem de placas finas

A Figura 12 ilustra uma placa ideal de comprimento (a), largura (b) e espessura (t), submetida a uma força de compressão uniformemente distribuída (N_x) na direção X (SOUZA, 2006).

Figura 12 – Placa comprimida idealizada



Fonte: Souza (2006)

Segundo Timoshenko e Gere (1963), o tratamento teórico para flambagem local em mesas e almas, parte da equação diferencial da superfície elástica de flambagem de uma placa fina comprimida, conforme equação (2.12).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \cdot \left(N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.12)$$

onde:

$$D = \text{rigidez da placa} = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)};$$

E = módulo de elasticidade do aço;

ν = coeficiente de Poisson;

t = espessura da placa;

$w(x, y)$ = deslocamento perpendicular ao plano da placa.

Ao aumentar gradualmente (N_x), a forma plana de equilíbrio da placa pode torna-se instável e ocorre a flambagem (TIMOSHENKO e GERE, 1963). No caso de bordas simplesmente apoiadas, admite-se uma representação em dupla série para a superfície de deflexão da flambagem da placa, conforme equação (2.13).

$$w = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} a_{\mu\eta} \cdot \text{sen}\left(\frac{\mu\pi x}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\eta\pi y}{b}\right) \quad (2.13)$$

Onde $a_{\mu\eta}$ é a amplitude máxima de deslocamento de cada modo de flambagem, μ é o número de semi ondas que aparecem durante a flambagem na direção X e η é o número de semi ondas que aparecem durante a flambagem na direção Y .

A equação (2.14) expressa a energia de deformação de flexão da placa (ΔU) (TIMOSHENKO e GERE, 1963).

$$\Delta U = \frac{\pi^4 ab}{8} \cdot D \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} a_{\mu\eta}^2 \cdot \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right)^2 \quad (2.14)$$

O trabalho ΔT realizado pelas forças de compressão durante a flambagem da placa pode ser representado pela equação (2.15).

$$\Delta T = \frac{1}{2} \cdot N_x \cdot \int_0^a \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy = \frac{\pi^2 b}{8a} \cdot N_x \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} \mu^2 \cdot a_{\mu\eta}^2 \quad (2.15)$$

A carga crítica de flambagem pode ser obtida através do método da energia, igualando-se o trabalho realizado pelas forças externas no plano médio (ΔT) à energia de deformação de flexão da placa (ΔU), conforme equação (2.16).

$$\frac{\pi^2 b}{8a} \cdot N_x \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} \mu^2 \cdot a_{\mu\eta}^2 = \frac{\pi^4 ab}{8} \cdot D \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\eta=1}^{\infty} a_{\mu\eta}^2 \cdot \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right)^2 \quad (2.16)$$

Portanto, a carga (N_x) pode ser expressa pela equação (2.17)

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D}{\mu^2} \cdot \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.17)$$

Os infinitos valores de (N_x) estão associados aos infinitos modos de flambagem que a placa apresenta. No entanto, o objetivo é identificar o valor mínimo ($N_{x,cri}$) que satisfaça a equação (2.12). Ao analisar a Equação (2.17), verifica-se que o valor $N_{x,cri}$ ocorre quando $\eta = 1$, conforme equação (2.18). O significado físico disto é que a placa flamba de tal maneira que podem haver várias semi ondas na direção da compressão, mas apenas uma semi onda na direção transversal (SOUZA, 2006).

$$\frac{N_{x,cri}}{b \cdot t} = \sigma_{x,cri} = \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot t} \cdot \left(\mu \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{a}{b} \right)^2 \quad (2.18)$$

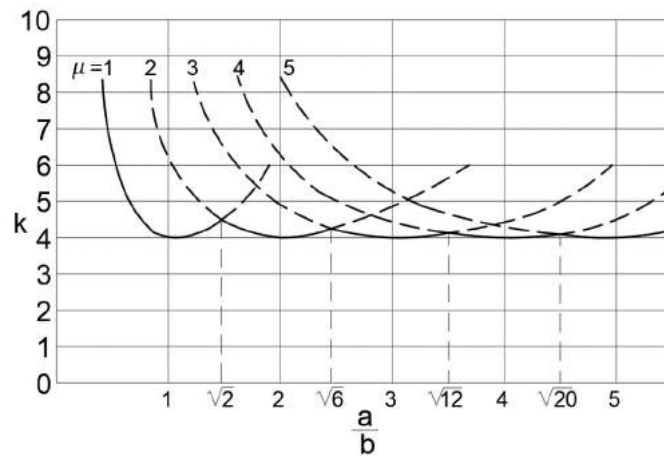
Dessa forma, considerando a equação (2.19), tem-se a equação (2.20).

$$k_c = \left(\mu \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{a}{b} \right)^2 \quad (2.19)$$

$$\sigma_{x,cri} = \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot t} \cdot k_c = \frac{\pi^2}{b^2 \cdot t} \cdot \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot k_c = \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \left(\frac{b}{t} \right)^2} \cdot k_c \quad (2.20)$$

Onde k_c é denominado coeficiente de flambagem da placa. Verifica-se na Figura 13 que para diferentes valores de μ , o valor mínimo que (k_c) pode assumir para uma placa simplesmente apoiada nas bordas é igual a quatro. Desta forma, a tensão crítica de flambagem elástica de uma placa pode ser considerada como independente do valor da relação (a/b) da placa (SOUZA, 2006).

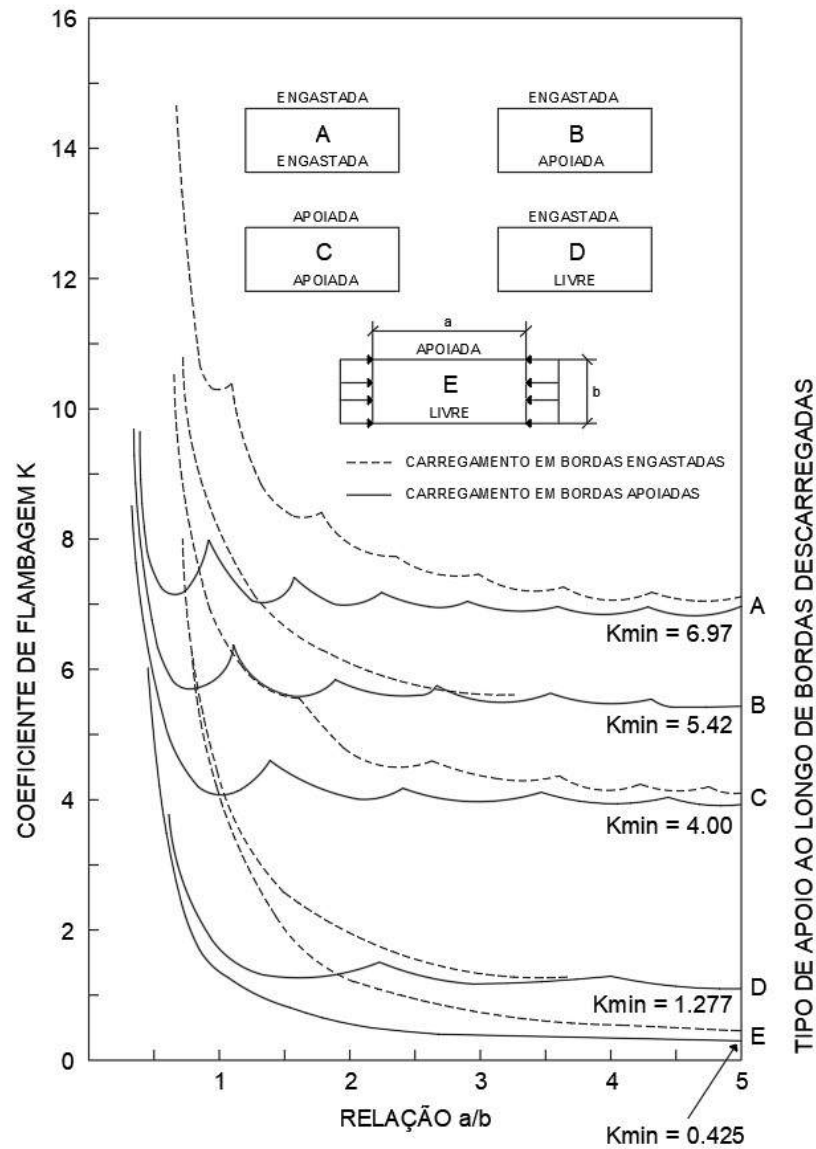
Figura 13 – Curvas de k_c para diferentes valores de μ



Fonte: Timoshenko e Gere (1963)

De modo geral, nos casos usuais, o comprimento longitudinal da placa é muito maior que seu comprimento transversal (b). A partir da relação $(a/b) > 5$, o tipo de apoio na direção transversal da placa não influencia no valor da tensão crítica de flambagem. Diante disto, a tensão crítica fica relacionada fundamentalmente ao tipo de vínculo pelas bordas longitudinais. A Figura 14 mostra os valores mínimos de (k_c) para diferentes situações de apoio (SALMON et al., 2009).

Figura 14 – Curvas de k_c para diferentes situações de apoio



Fonte: Adaptado de Salmon et al. (2009)

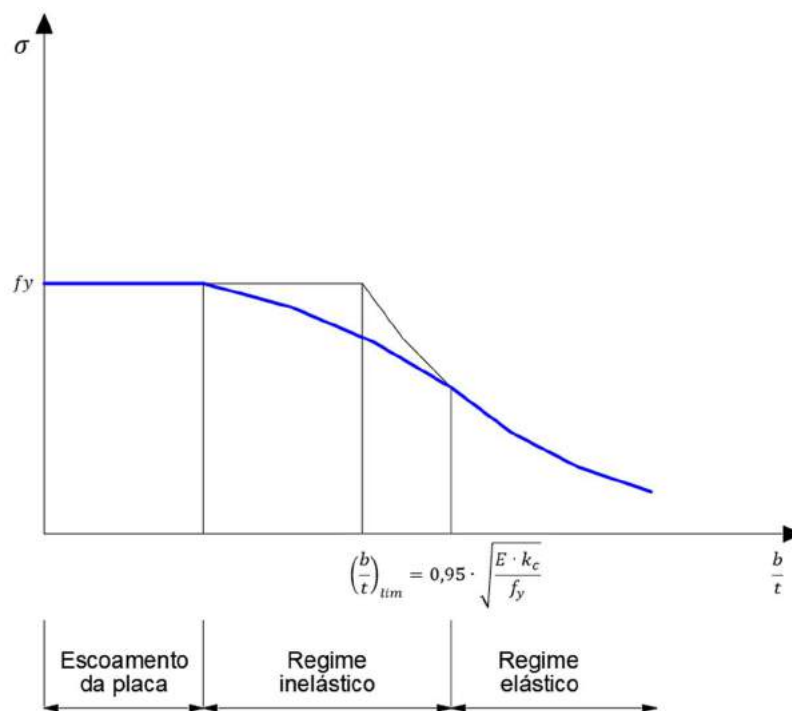
Desta forma, pode-se considerar o material aço, com $\nu = 0,3$ e a tensão crítica ($\sigma_{x,cri}$) igual a tensão de escoamento (f_y), para obter o valor da relação $(b/t)_{lim}$ correspondente à esbeltez limite de passagem da flambagem elástica para escoamento total de uma placa ideal, como mostram as equações (2.21) e (2.22).

$$\sigma_{x,cri} = f_y = \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - 0,3^2) \cdot \left(\frac{b}{t}\right)_{lim}^2} \cdot k_c \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{lim} = 0,95 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot k_c}{f_y}} \quad (2.22)$$

Segundo Souza (2006), a teoria apresentada está relacionada às placas ideais, onde a transição entre o regime elástico de flambagem e o escoamento da placa se dá de forma súbita. No entanto, isso não corresponde ao comportamento apresentados pelos perfis usuais. Devido à existência das tensões residuais, existe uma transição gradual entre a flambagem no regime elástico e o escoamento da mesa. Essa transição é denominada flambagem no regime inelástico (Figura 15).

Figura 15 – Curva σ em relação a esbeltez da placa (b/t)



Fonte: Adaptado de Souza (2006)

Em regime inelástico, a obtenção da tensão crítica de flambagem local não é simples. Bleich (1952) observou que a tensão crítica dada pela equação (2.20) permanece válida nessa região, desde que o módulo elástico E seja substituído por um módulo reduzido (ξE), onde ξ é um fator de plastificação, conforme equação (2.23). Desta forma, a tensão crítica no regime inelástico é dada pela equação (2.24).

$$\xi = \sqrt{\frac{E_t}{E}} \quad (2.23)$$

$$\sigma_{x,cri} = \frac{\pi^2 \cdot \xi E}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \left(\frac{b}{t}\right)^2} \cdot k_c \quad (2.24)$$

De acordo com Silva (2006), como o comportamento inelástico sempre reduz a rigidez da placa, tem-se sempre $\xi < 1$, conseqüentemente, a tensão crítica no regime inelástico apresentará valores inferiores aos valores críticos que seriam obtidos pela formulação do regime elástico.

2.5 Critérios da NBR 14762:2010 para perfis de seção retangular vazada

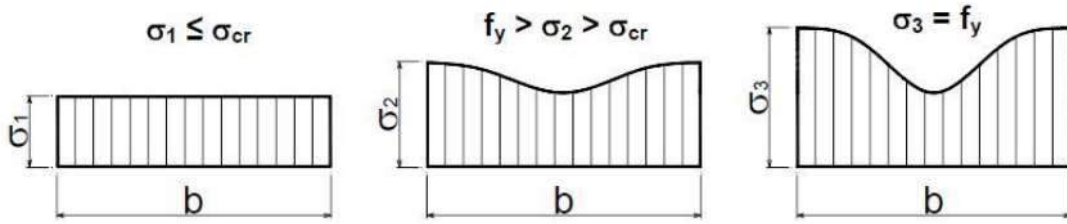
A NBR 14762:2010 estabelece os requisitos básicos que devem ser obedecidos no dimensionamento de perfis estruturais de aço formados a frio, constituídos por chapas ou tiras de aço-carbono ou aço de baixa liga, conectados por parafusos ou soldas. Para cálculo dos deslocamentos e da resistência última são previstos três métodos de dimensionamento: o método da largura efetiva (MLE), método da seção efetiva (MSE) e método da resistência direta (MRD).

2.5.1 Método da largura efetiva (MLE)

As placas não atingem o colapso quando a tensão de flambagem é alcançada. Os acréscimos de tensão podem ser suportados devido à redistribuição de tensões para as partes mais rígidas da placa (JAVARONI, 1999).

A Figura 16 ilustra o comportamento pós flambagem. A tensão permanece uniforme até alcançar a tensão crítica de flambagem (σ_{cri}). Após a flambagem, há uma redistribuição de tensões para as regiões vizinhas aos apoios por apresentarem mais rigidez e menores deslocamentos. O processo continua até que a tensão máxima atinja a tensão de escoamento do aço (f_y), o que caracteriza o fim da capacidade resistente da placa (PAULINO, 2009; JAVARONI, 1999).

Figura 16 – Estágios do comportamento da placa com bordas apoiadas submetida à compressão uniforme



Fonte: Paulino (2009)

A solução para este fenômeno foi proposta por Von Karman em 1910 e é representada pela equação diferencial (2.25).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.25)$$

Onde F é a função de tensão de Airy, a partir da qual se pode derivar as tensões através das equações (2.26), (2.27) e (2.28).

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

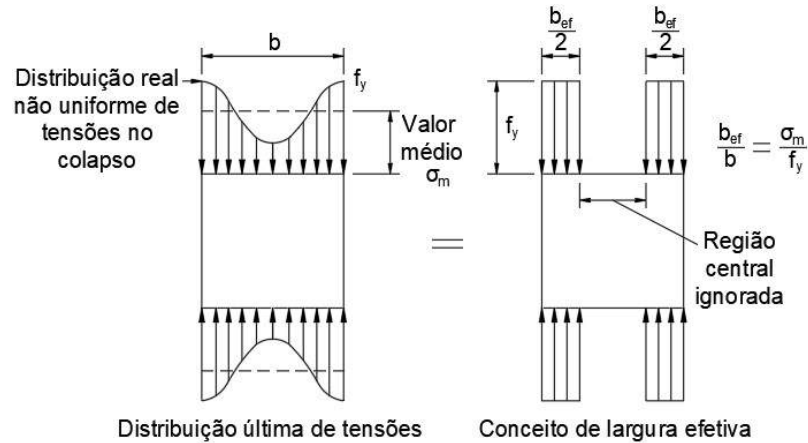
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.28)$$

A solução do problema envolve recursos numéricos e computacionais, não sendo possível estabelecer soluções simples e de aplicação geral. Por conta disto, Von Karman et al. (1932) propôs o método das larguras efetivas, que posteriormente foi modificado e ajustado por Winter (1947). Este método apresenta maior possibilidade de aplicação, assim como conduz a resultados confiáveis (SERMANHO, 1991).

De acordo com Sermanho (1991), o método das larguras efetivas considera a redução de rigidez da placa através da substituição da placa original de largura (b) por uma placa substituta de largura efetiva (b_{ef}), sendo $b_{ef} < b$. A tensão última atuante nas bordas da placa original é igual à tensão de escoamento (f_y) que a placa substituta de largura efetiva (b_{ef}) está submetida. Todo esse princípio pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 – Largura efetiva de placas apoiadas em ambas as bordas longitudinais



Fonte: Adaptado de Fakury et al. (2016)

O efeito pós flambagem é maior em placas apoiadas nas duas bordas longitudinais (classificadas como AA) do que em placas com uma borda longitudinal livre (classificadas como AL). Isso deve-se ao fato de que a forma fletida da última é menos curva que a primeira, e a redistribuição de tensões no plano não é tão marcante (SILVA, 2006).

Para o cálculo do esforço resistente, o MLE considera os elementos constituintes do perfil como placas isoladas. Dessa forma, o cálculo da largura efetiva deve ser realizado para cada elemento separadamente, posteriormente, é determinada as propriedades efetivas da seção transversal. O índice de esbeltez reduzido (λ_p) é determinado conforme equação (2.29) (COSTA, 2012).

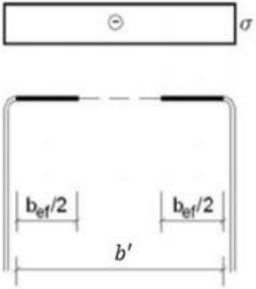
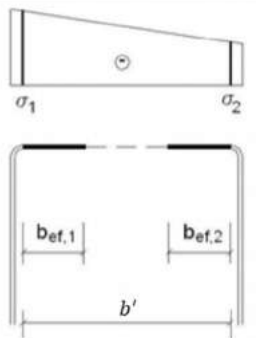
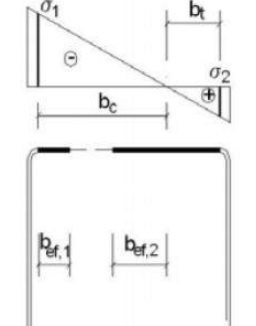
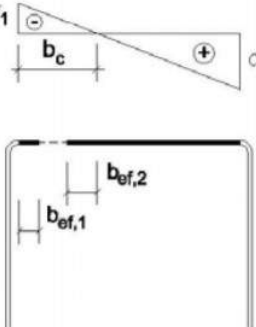
$$\lambda_p = \frac{b/t}{0,95 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot k_c}{\sigma}}} \quad (2.29)$$

Desse modo, a largura efetiva (b_{ef}) de uma chapa comprimida pode ser calculada por meio da equação (2.30), em que b' é a largura interna da seção transversal do perfil. Quando a esbeltez reduzida do elemento (λ_p) for menor que 0,673, não ocorre a flambagem local no elemento e a largura efetiva é a própria largura do elemento (ABNT, 2010).

$$\begin{aligned} b_{ef} &= b' & \text{para } \lambda_p \leq 0,673 \\ b_{ef} &= b' \left(1 - \frac{0,22}{\lambda_p} \right) & \text{para } \lambda_p > 0,673 \end{aligned} \quad (2.30)$$

A Tabela 1 mostra as equações para o cálculo do coeficiente de flambagem local para elementos AA. Para perfis formados a frio, o valor do coeficiente depende das condições de contorno e carregamento dos elementos. A condição de carregamento é avaliada em função da relação entre a máxima e mínima tensão atuante no elemento (SILVA e SILVA, 2008).

Tabela 1 – Largura efetiva e coeficientes de flambagem local para elementos AA

Caso a		$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1,0$ $k_c = 4,0$
Caso b		$0 \leq \psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 1,0$ $b_{ef,1} = b_{ef}/(3 - \psi)$ $b_{ef,2} = b_{ef} - b_{ef,1}$ $k_c = 4 + 2(1 - \psi) + 2(1 - \psi)^3$
Caso c		$-0,236 < \psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 0$ $b_{ef,1} = b_{ef}/(3 - \psi)$ $b_{ef,2} = b_{ef} - b_{ef,1}$ $k_c = 4 + 2(1 - \psi) + 2(1 - \psi)^3$
Caso d		$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \leq -0,236$ $b_{ef,1} = b_{ef}/(3 - \psi)$ $b_{ef,2} = 0,5b_{ef}$ <p>sendo $b_{ef,2} + b_{ef,1} \leq b_c$</p> $k_c = 4 + 2(1 - \psi) + 2(1 - \psi)^3$
Nota 1: A parte tracionada deve ser considerada totalmente efetiva.		
Nota 2: o sinal (-) indica compressão.		

Fonte: Adaptado de ABNT (2010)

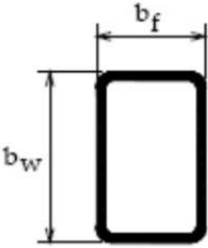
2.5.2 Método da seção efetiva (MSE)

Diferente do método da largura efetiva (MLE), em que a flambagem local é considerada com o cálculo da largura efetiva de cada elemento separadamente da seção transversal. No método da seção efetiva (MSE), a flambagem local é considerada por meio de propriedades geométricas efetivas (reduzidas) da seção transversal completa (ABNT, 2010).

Para barras submetidas à força axial de compressão, a força axial de flambagem local elástica (N_l) é obtida através da equação (2.31), em que k_c é o coeficiente de flambagem local para a seção completa, obtido da Tabela 2 para compressão centrada em perfis de seção retangular vazada (ABNT, 2010).

$$N_l = k_c \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \left(\frac{b_w}{t}\right)^2} \cdot A \quad (2.31)$$

Tabela 2 – Coeficiente de flambagem local k_c para a seção completa em barras sob compressão centrada

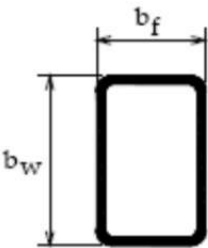
Caso d	<p>Seção tubular retangular com solda de costura contínua (para seção tubular retangular formada por dois perfis U simples ou U enrijecido com solda de costura intermitente, k_c deve ser calculado para cada perfil isoladamente).</p>  $k_c = 6,6 - 5,8 n + 8,6 n^2 - 5,4 n^3$ $(0,1 \leq n \leq 1,0)$
Nota 1: b_f e b_w são dimensões nominais dos elementos, conforme indicado na Figura.	
Nota 2: $n = b_f/b_w$.	

Fonte: Adaptado de ABNT (2010)

Para barras submetidas à flexão simples, o momento fletor de flambagem local elástica (M_l) é obtido através da equação (2.32), em que W_c é o módulo de resistência elástico da seção bruta em relação à fibra extrema comprimida e k_c é o coeficiente de flambagem local para a seção completa, obtido da Tabela 3 para flexão simples em perfis de seção retangular vazada (ABNT, 2010).

$$M_l = k_c \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \left(\frac{b_w}{t}\right)^2} \cdot W_c \quad (2.32)$$

Tabela 3 - Coeficiente de flambagem local k_c para a seção completa em barras sob flexão simples em torno do eixo de maior inércia

Caso c	<p>Seção tubular retangular com solda de costura contínua (para seção tubular retangular formada por dois perfis U simples ou U enrijecido com solda de costura intermitente, k_c deve ser calculado para cada perfil isoladamente).</p>  $k_c = 14,5 + 178 n - 602 n^2 + 649 n^3 - 234 n^4$ $(0,1 \leq n \leq 1,0)$
Nota 1: b_f e b_w são dimensões nominais dos elementos, conforme indicado na Figura.	
Nota 2: $n = b_f/b_w$.	

Fonte: Adaptado de ABNT (2010)

2.5.3 Método da resistência direta (MRD)

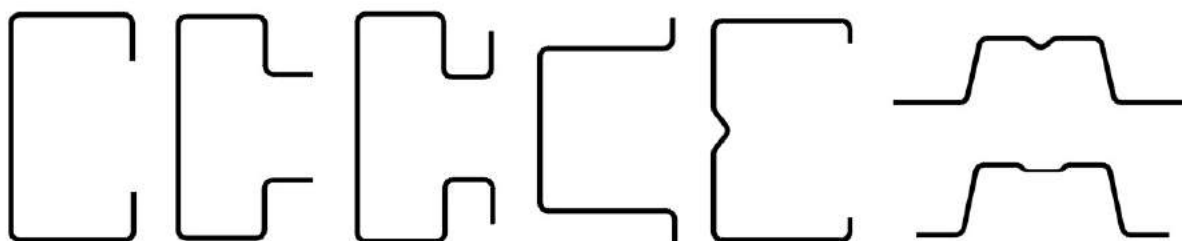
Com o método da resistência direta (MRD), também é possível o dimensionamento de barras submetidas à compressão centrada e à flexão simples considerando os efeitos da interação entre os modos de flambagem global e local (COSTA, 2012). Esse método está prescrito na norma americana (AISI, 2016), australiana/neozelandesa (AS/NZS, 2018) e no anexo C da NBR 14762:2010. Dessa maneira, este método pode substituir o método da largura efetiva e o método da seção efetiva.

O MRD foi desenvolvido por SCHAFER e PEKÖZ (1998), o qual originou-se de pesquisas realizadas por HANCOCK et al. (1994). Este método requer a determinação das forças críticas de flambagem elástica do perfil (local, distorcional e global) sendo determinadas com base em métodos analíticos ou numéricos, como método os elementos finitos e método das faixas finitas. Para isso, utilizam-se programas como GBTul (BEBIANO et al., 2018), CUFSM (SCHAFER, 2010) ou ANSYS (SAS, 2009) que associam as características do aço à uma série de curvas de resistência, calibradas experimentalmente, de forma a determinar a resistência última do perfil (CARVALHO et al., 2014; PAIXÃO, 2018).

Através do MRD, é possível calcular os valores de cálculo da força axial de compressão resistente e do momento fletor resistente. No entanto, mesmo sendo possível analisar numericamente qualquer combinação de tensões axiais, o MRD não fornece previsões para o dimensionamento de elementos sujeitos a força cortante, momento fletor combinado com cortante ou combinação de força axial e momento fletor (COSTA, 2012).

O MRD adota curvas de dimensionamento do tipo *Winter*, calibradas por análises experimentais e numéricas, que incluem os efeitos das imperfeições geométricas, tensões residuais geradas pelo dobramento a frio, dentre outras considerações. HANCOCK et al. (1994) demonstrou por meio de resultados de vários experimentos, com diferentes seções geométricas (Figura 18), que a resistência a compressão distorcional das seções estava diretamente relacionada com a esbeltez distorcional dos elementos.

Figura 18 – Seções transversais analisadas por Hancock et al., 1994



Fonte: Adaptado de Hancock et al. (1994)

2.5.4 Barras submetidas à flexão composta

Segundo ABNT (2010), para barras submetidas à flexão composta, a força normal e os momentos solicitantes de cálculo devem satisfazer a expressão de interação indicada pela equação (2.33).

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \leq 1,0 \quad (2.33)$$

Onde N_{Sd} é a força axial solicitante de cálculo de tração ou de compressão, $M_{x,Sd}$ e $M_{y,Sd}$ são os momentos fletores solicitantes de cálculo, na seção considerada, em relação aos eixos X e Y , respectivamente. N_{Rd} é a força axial resistente de cálculo de tração ou de compressão, $M_{x,Rd}$ e $M_{y,Rd}$ são os momentos fletores resistentes de cálculo, em relação aos eixos X e Y , respectivamente.

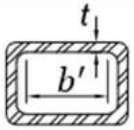
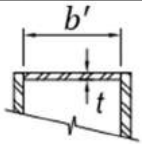
2.6 Critérios da AISC 360:2016 para perfis de seção retangular vazada

De acordo com AISC (2016), para o dimensionamento de elementos estruturais de aço formados a frio, são recomendadas as disposições da AISI S100:2016, exceto para seções estruturais vazadas formadas a frio, as quais são projetadas de acordo com as especificações da AISC 360:2016.

A AISC 360:2016 define como seção caixão, o perfil duplamente simétrico, quadrado ou retangular, feito com quatro placas soldadas nos cantos de tal forma que ele se comporta como um único elemento.

Para barras submetidas à força axial de compressão, as seções são classificadas como não esbeltas ou esbeltas. Para seções não esbeltas, a razão entre a largura e espessura dos seus elementos não deve exceder λ_r , conforme Tabela 4. Por outro lado, caso a razão entre a largura e espessura de qualquer elemento de compressão exceder λ_r , a seção é considerada como esbelta.

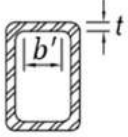
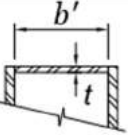
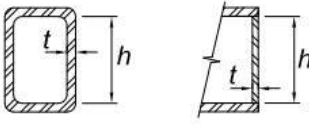
Tabela 4 – Limite de esbeltez para barras submetidas à força axial de compressão

Descrição do elemento	Relação largura espessura	Limite de esbeltez λ_r (Não esbelta/ Esbelta)	Exemplos
Seções retangulares vazadas formadas a frio	$\frac{b'}{t}$	$1,40 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	
Seção caixão	$\frac{b'}{t}$	$1,49 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	

Fonte: Adaptado de AISC (2016)

Para barras submetidas à flexão, as seções são classificadas como compactas, não compactas ou esbeltas. Para seções compactas, as mesas devem estar continuamente ligadas às almas e a razão entre a largura e espessura dos elementos comprimidos não deve exceder λ_p , conforme Tabela 5. Caso a esbeltez de um ou mais elementos comprimidos exceda λ_p , mas não exceda λ_r , a seção é classificada como não compacta. Por outro lado, se a esbeltez de algum elemento comprimido exceder λ_r , a seção é considerada como esbelta.

Tabela 5 – Limites de esbeltez para barras submetidas à flexão

Descrição do elemento	Relação largura espessura	Limite de esbeltez		Exemplos
		λ_p (Compacta/ não compacta)	λ_r (Não compacta/ Esbelta)	
Mesas de seções retangulares vazadas formadas a frio	$\frac{b'}{t}$	$1,12 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$1,40 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	
Mesas de seção caixão	$\frac{b'}{t}$	$1,12 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$1,49 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	
Almas de seções retangulares vazadas formadas a frio e seção caixão	$\frac{h}{t}$	$2,42 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$5,70 \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	

Fonte: Adaptado de AISC (2016)

De acordo com AISC (2016), as seções compactas atingem o momento de plastificação total (M_p) e exibem suficiente capacidade de rotação inelástica para configurar uma rótula plástica. Dessa forma, o momento fletor resistente (M_{res}) é igual ao momento de plastificação total (M_p). Nas seções não compactas, a flambagem local ocorre após ter desenvolvido plastificação parcial ($M_{res} > M_y$), mas sem apresentar significativa rotação. Por outro lado, nas seções esbeltas, a ocorrência da flambagem local impede que seja atingido o momento de início de plastificação ($M_{res} < M_y$). A Figura 19 apresenta curvas momento-rotação de vigas metálicas, com seções compacta, não compacta e esbelta, sujeitas a carregamento crescente, mostrando a influência da flambagem local sobre o momento resistente das vigas e sobre suas deformações (PFEIL e PFEIL, 2009).

Figura 19 – Comportamento de vigas com seções compacta, não compacta e esbelta



Fonte: Pfeil e Pfeil (2009)

A resistência à flexão nominal (M_n) deve ser o menor valor obtido de acordo com os estados limites últimos de flambagem local da mesa, flambagem local da alma e flambagem lateral com torção. Para seções compactas, a resistência à flexão nominal é igual ao momento de plastificação total (M_p) e pode ser obtido conforme equação (2.34), onde Z_p é o módulo plástico da seção (AISC, 2016).

$$M_n = M_p = f_y Z_p \quad (2.34)$$

2.6.1 Flambagem local da mesa

De acordo com AISC (2016), para seções com mesas compactas, o estado limite de flambagem local da mesa não se aplica. Nas seções com mesas não compactas, o valor da resistência à flexão nominal (M_n) é dado pela equação (2.35), onde W_c é o módulo elástico da seção e b' é a largura interna da mesa comprimida, definida pela Tabela 5.

$$M_n = M_p - (M_p - f_y W_c) \left(3,57 \frac{b'}{t_f} \sqrt{\frac{f_y}{E}} - 4,0 \right) \leq M_p \quad (2.35)$$

Para seções com mesas esbeltas, a resistência à flexão nominal (M_n) é calculada conforme equação (2.36), onde W_e é o módulo elástico efetivo da seção, determinado pela largura efetiva (b_e) da mesa comprimida, obtida através das equações (2.37) e (2.38) para seções retangulares vazadas formadas a frio e seção caixão, respectivamente.

$$M_n = f_y W_e \quad (2.36)$$

$$b_e = 1,92 t_f \sqrt{\frac{E}{f_y}} \left(1 - \frac{0,38}{b'/t_f} \sqrt{\frac{E}{f_y}} \right) \leq b \quad (2.37)$$

$$b_e = 1,92 t_f \sqrt{\frac{E}{f_y}} \left(1 - \frac{0,34}{b'/t_f} \sqrt{\frac{E}{f_y}} \right) \leq b \quad (2.38)$$

2.6.2 Flambagem local da alma

De acordo com AISC (2016), para seções com almas compactas, o estado limite de flambagem local da alma não se aplica. Nas seções com almas não compactas, o valor da resistência à flexão nominal (M_n) é dado pela equação (2.39), onde W_c é o módulo elástico da seção e h é a altura da alma, definida pela Tabela 5.

$$M_n = M_p - (M_p - f_y W_c) \left(0,305 \frac{h}{t_w} \sqrt{\frac{f_y}{E}} - 0,738 \right) \leq M_p \quad (2.39)$$

Para seções com almas esbeltas e escoamento na mesa comprimida, a resistência à flexão nominal (M_n) é calculada conforme equação (2.40).

$$M_n = R_{pg} f_y W_c \quad (2.40)$$

Por outro lado, caso a seção com almas esbeltas possua flambagem local na mesa comprimida, a resistência à flexão nominal (M_n) é obtida através da equação (2.41), onde R_{pg} é o fator de redução de resistência à flexão, determinado pela equação (2.42) com $a_w = 2ht_w/(b't_f)$ e F_{cr} é calculado pela equação (2.43) com k_c igual a 4,0.

$$M_n = R_{pg} F_{cr} W_c \quad (2.41)$$

$$R_{pg} = 1 - \frac{a_w}{1.200 + 300a_w} \left(\frac{h}{t_w} - 5,7 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \right) \leq 1,0 \quad (2.42)$$

$$F_{cr} = \frac{0,9Ek_c}{\left(\frac{b'}{t_f}\right)^2} \quad (2.43)$$

2.6.3 Barras submetidas à flexão composta

Segundo AISC (2016), a primeira especificação da AISC, AISC (1923), preconizava que a soma das tensões devidas à flexão e compressão não deveriam exceder o valor da tensão admissível. A primeira equação de interação, expressa pela equação (2.44), foi introduzida na AISC (1936), em que F_a e F_b são, respectivamente, as tensões axiais e de flexão admissíveis permitidas pela norma, e f_a e f_b são as tensões correspondentes, devido à força axial e o momento de flexão, respectivamente.

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1,0 \quad (2.44)$$

Esta equação de interação linear ficou em vigor até 1961, quando foi modificada na AISC (1961) para levar em consideração a estabilidade da estrutura e o efeito de segunda

ordem, conforme equação (2.45), em que C_m representa o efeito do gradiente de momento (AISC, 2016).

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{\left(1 - \frac{f_a}{F_e'}\right) F_b} \leq 1,0 \quad (2.45)$$

A AISC (1986) introduziu uma nova abordagem para barras submetidas à flexão composta. A força normal e os momentos solicitantes de cálculo devem satisfazer as expressões de interação indicadas pelas equações (2.46) e (2.47). É importante atentar-se ao fato que estas equações ainda estão presentes na AISC (2016).

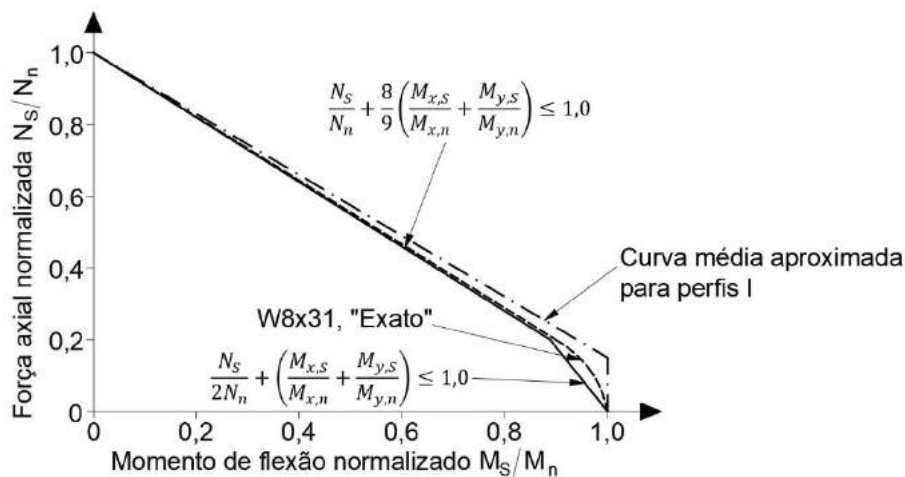
$$\frac{N_s}{2N_n} + \left(\frac{M_{x,s}}{M_{x,n}} + \frac{M_{y,s}}{M_{y,n}} \right) \leq 1,0 \quad \text{quando } \frac{N_{sd}}{N_{Rd}} < 0,2 \quad (2.46)$$

$$\frac{N_s}{N_n} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{x,s}}{M_{x,n}} + \frac{M_{y,s}}{M_{y,n}} \right) \leq 1,0 \quad \text{quando } \frac{N_{sd}}{N_{Rd}} \geq 0,2 \quad (2.47)$$

Onde N_s é a força axial solicitante de tração ou de compressão, $M_{x,s}$ e $M_{y,s}$ são os momentos fletores solicitantes, na seção considerada, em relação aos eixos X e Y , respectivamente. N_n é a resistência axial nominal de tração ou de compressão, $M_{x,n}$ e $M_{y,n}$ são as resistências às flexões nominais, em relação aos eixos X e Y , respectivamente.

A curva representada pelas equações (2.46) e (2.47) quase sobrepõe a curva analiticamente exata do maior eixo de flexão do perfil W8x31, conforme Figura 20. As equações foram projetadas para serem versáteis, em que os termos nos denominadores fixam os pontos finais da curva de interação (AISC, 2016).

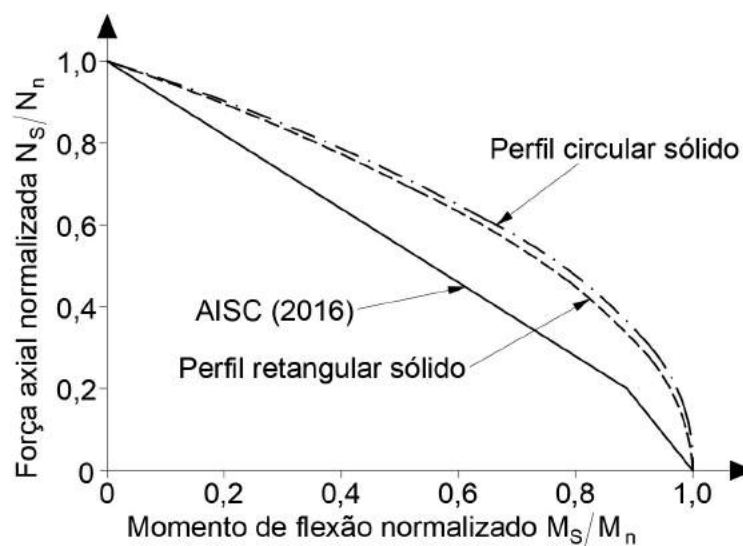
Figura 20 – Curvas de interação: AISC (2016), W8x31, média aproximada para perfis I



Fonte: Adaptado de AISC (2016)

A Figura 21 mostra as curvas exatas de interação para perfis retangular e circular sólidos. Observa-se que a curva de interação da AISC (2016) é conservadora para esses perfis.

Figura 21 – Curvas de interação: AISC (2016), perfis retangular e circular sólidos



Fonte: Adaptado de AISC (2016)

3 MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO

A análise e previsão do comportamento estrutural não linear é uma questão importante para engenheiros e pesquisadores. Teorias inelásticas foram propostas para obter uma descrição precisa do comportamento estrutural. Entre as teorias não lineares clássicas, destacam-se três abordagens que são amplamente aplicadas na modelagem inelástica de estruturas: teoria da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano (AMORIM, 2016).

A teoria da plasticidade é provavelmente a análise não linear mais conhecida. Esta teoria considera critérios elastoplásticos para a descrição da ruptura do material, como os critérios de Mohr-Coloumb, von Mises e Drucker-Prager. Dentre os principais fenômenos que podem ser modelados com base na teoria da plasticidade, estão a presença de deformações plásticas, zona de encruamento ou endurecimento plástico e existência de tensão última ou máxima. Entretanto, apesar de descrever uma parte dos fenômenos comprovados experimentalmente, a teoria falha ao tentar reproduzir comportamentos não lineares nas proximidades do colapso, a exemplo da fase de amolecimento, onde ocorre degradação da resistência (decréscimo do limite elástico) e degradação da rigidez (decréscimo do módulo de elasticidade). Além disso, os modelos de plasticidade não preveem a existência de deformação máxima ou de falha. Todos esses efeitos só viriam a ser bem representados com o surgimento da mecânica do dano (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

Segundo Bittencourt (1999), a mecânica da fratura é capaz de determinar as condições, sob as quais, um sólido submetido a um carregamento externo, pode ir ao colapso devido à propagação de uma fissura ou descontinuidade existente.

Kirsch (1898) propôs uma solução analítica para o problema da chapa infinita com fissura central – conhecida como solução de Kirsch. Com a continuidade dos estudos sobre problemas de fratura, Griffith (1921) desenvolveu uma teoria que associa a propagação das fissuras em meio contínuo a partir de um balanço de energia e fundamentado no conceito de taxa de liberação de energia. Essa foi uma importante contribuição relacionada ao desenvolvimento de uma formulação analítica para a energia de fratura, utilizada até hoje nos estudos de análise inelástica de estruturas (COELHO, 2017).

A mecânica da fratura apresenta boa precisão para estruturas com geometrias simples, poucas fissuras e materiais homogêneos. Contudo, tratando-se de problemas de engenharia civil, não é adequada para aplicações práticas, além de demandar a consideração de fissuras iniciais para iniciar a análise (AMORIM, 2016).

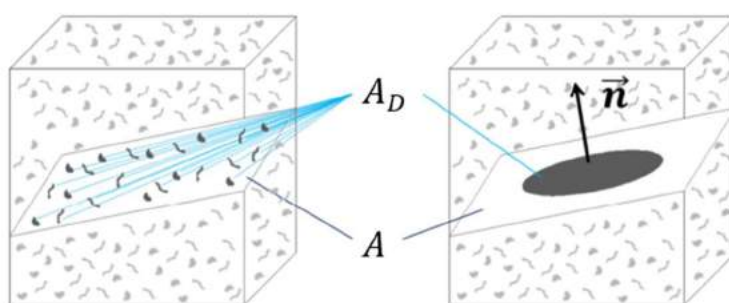
Diante das limitações encontradas pelas duas abordagens supracitadas, a mecânica do dano contínuo surgiu como uma formulação alternativa para a introdução de novas variáveis de estado dentro dos modelos constitutivos (LEMAITRE e CHABOCHE, 1985).

O primeiro trabalho sobre a integridade do material foi proposto por Kachanov (1958), que estudou a ruptura de materiais em regime de deformação lenta, associado com a presença de defeitos no meio contínuo. Em seguida, Rabotnov (1969) associou o valor do dano com o aumento das deformações de um material, ou seja, o dano apresenta como consequência redução de rigidez da estrutura. Posteriormente, Lemaitre e Chaboche (1985) usaram a termodinâmica de processos irreversíveis para formular, com rigor matemático, o que hoje é chamado de mecânica do dano contínuo.

A mecânica de dano contínuo é baseada na introdução de uma variável interna, denominada de dano, que caracteriza a densidade de micro defeitos, como microfissuras e/ou microvazios. Tais micro defeitos são muito pequenos para serem considerados como fissuras discretas, embora não sejam pequenos o suficiente para serem desprezados (AMORIM, 2016). Logo, o objetivo é descrever a evolução do dano e sua influência no comportamento mecânico da estrutura, seja num material elástico ou elastoplástico. Esta influência é introduzida nas relações constitutivas através do conceito de tensão equivalente e da hipótese de equivalência de deformações (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985).

A Figura 22 ilustra um elemento de volume representativo (EVR), o qual é uma porção de um material representado em mesoescala, que permite a quantificação de micro defeitos. Desta forma, pode-se considerar uma seção transversal arbitrária (\vec{n}), sendo a área total (A) e (A_D) a área de micro defeitos. Por fim, a área efetiva (\tilde{A}) é dada pela equação (3.1).

Figura 22 – Elemento de volume representativo (EVR)



Fonte: Adaptado de Amorim (2016)

$$\tilde{A} = A - A_D \quad (3.1)$$

Segundo Lemaitre e Chaboche (1985), o dano pode ter valores entre zero (elemento intacto) e um (elemento totalmente danificado) e é definido pela equação (3.2).

$$d = \frac{A_D}{A} \quad (3.2)$$

Para um caso uniaxial, a tensão efetiva ($\tilde{\sigma}$) é definida pela equação (3.3), onde σ é a tensão de Cauchy ($\sigma = P/A$).

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (3.3)$$

Lemaitre e Chaboche (1985) propuseram a hipótese da equivalência de deformações, que estabelece que o comportamento de um material danificado pode ser descrito pelas mesmas equações do intacto, se a tensão (σ) for substituída pela efetiva ($\tilde{\sigma}$). Portanto, de acordo com a hipótese de equivalência de deformações, a lei de elasticidade linear para um material danificado é dada pela equação (3.4), em que E é o módulo de elasticidade, ε é a deformação total, ε^e é a deformação elástica e ε^p é a deformação plástica.

$$\tilde{\sigma} = E \varepsilon^e \Rightarrow \sigma = (1 - d)E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3.4)$$

Apesar de ter diversos trabalhos que utilizam a modelagem mecânica baseada nos conceitos de dano contínuo, esta abordagem é mais convenientemente utilizada em treliças e pórticos, pois modelos contínuos são usualmente utilizados para estruturas relativamente simples (BAZAN, 2017). Tais modelos necessitam de uma fina discretização e divisão da seção transversal em lâminas, que representam o comportamento mecânico do aço ou do concreto. Outra desvantagem consiste na implementação de algoritmos computacionais complexos e ineficientes, o que dificulta o uso na análise de estruturas tridimensionais e com geometria e condições de contorno complexas. Portanto, o custo computacional do modelo pode inviabilizar a análise de estruturas complexas (COELHO, 2017).

Diante disto, modelos simplificados foram desenvolvidos de forma a ter um embasamento físico consistente e ao mesmo tempo ser representativo em relação aos fenômenos envolvidos. Dentre os modelos simplificados, o presente trabalho utiliza a teoria do dano concentrado proposta por Flórez-López (1993), que é baseada na incorporação de

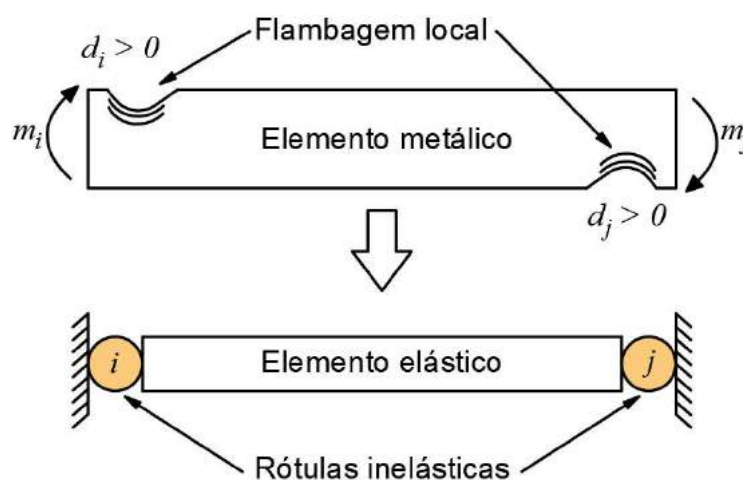
conceitos da mecânica da fratura e de dano clássico em elementos de pórtico com rótulas plásticas.

O dano é incorporado às rótulas plásticas, que passam a ser chamadas genericamente de rótulas inelásticas. A concentração do dano em rótulas gera grande redução do custo computacional. Desta forma, análises mais complexas podem ser viabilizadas, como carregamentos cíclicos, de alto impacto ou de pórticos 3D (COELHO, 2017).

3.1 Conceitos iniciais

A Figura 23 mostra um elemento estrutural metálico sujeito a momentos fletores m_i e m_j aplicados em suas extremidades i e j , respectivamente. Assume-se que os fenômenos de plastificação da estrutura metálica e a descontinuidade devido à flambagem local sejam concentrados nas extremidades do elemento. A plastificação da estrutura metálica é representada pela formação de uma rótula plástica, enquanto a flambagem local na extremidade do elemento é descrita por variáveis de dano acrescentadas à rótula (d_i, d_j) (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

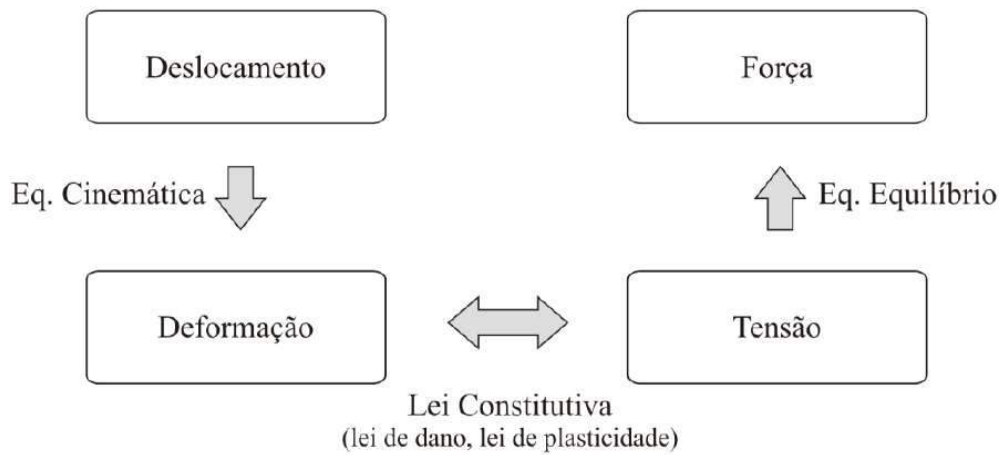
Figura 23 – Caracterização da flambagem local em um elemento metálico e respectivo modelo de dano concentrado



Fonte: Adaptado de Flórez-López et al. (2015)

A Figura 24 mostra um fluxograma que descreve as etapas necessárias na análise mecânica via modelo de dano concentrado. As tensões, deformações, rotações e os valores de dano são calculados por meio de relações cinemáticas, equações de equilíbrio e leis constitutivas, sendo que a última considera ainda leis de evolução do dano e da deformação plástica (COELHO, 2017).

Figura 24 – Fluxograma das etapas de análise do modelo de dano concentrado

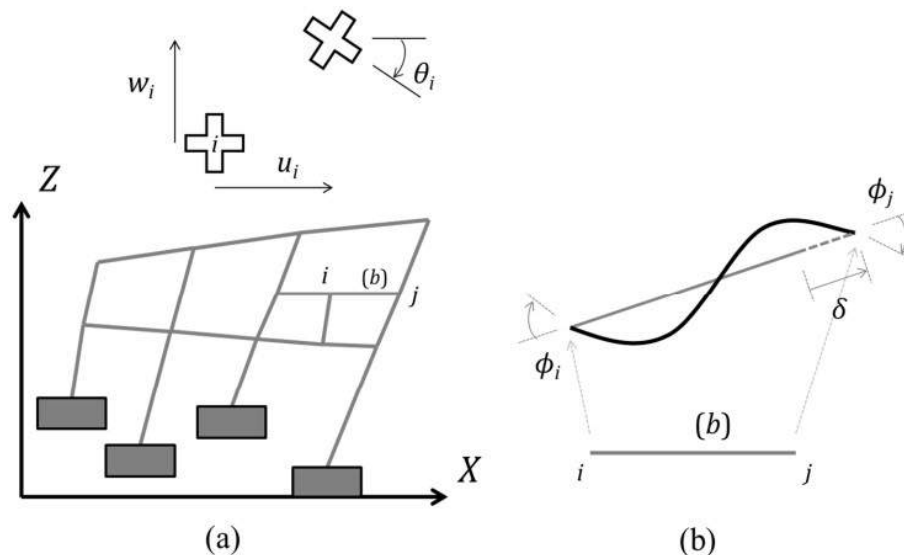


Fonte: Coelho (2017)

3.2 Cinemática de pórticos planos

Considere um elemento b do pórtico plano constituído por m elementos conectados por n nós (Figura 25a). A matriz de deslocamentos generalizados do nó i é definida pela equação (3.5) (AMORIM, 2016).

Figura 25 – (a) Pórtico plano e deslocamentos generalizados do nó i ; (b) deformações generalizadas do elemento b entre os nós i e j .



Fonte: Amorim (2016)

$$\{u\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Onde u_i e w_i são deslocamentos nas direções dos eixos globais: X e Z, respectivamente, e θ_i é a rotação total do nó em relação a configuração inicial. Desta forma, a matriz dos deslocamentos nodais generalizados de um elemento b entre os nós i e j são representadas pela equação (3.6).

$$\{q\}_b = \begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

A matriz generalizada de deslocamentos nodais de toda estrutura é dada pela equação (3.7), onde as matrizes de deslocamentos generalizados de todos os nós são reunidas.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{u\}_1 \\ \{u\}_2 \\ \vdots \\ \{u\}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ w_n \\ \theta_n \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

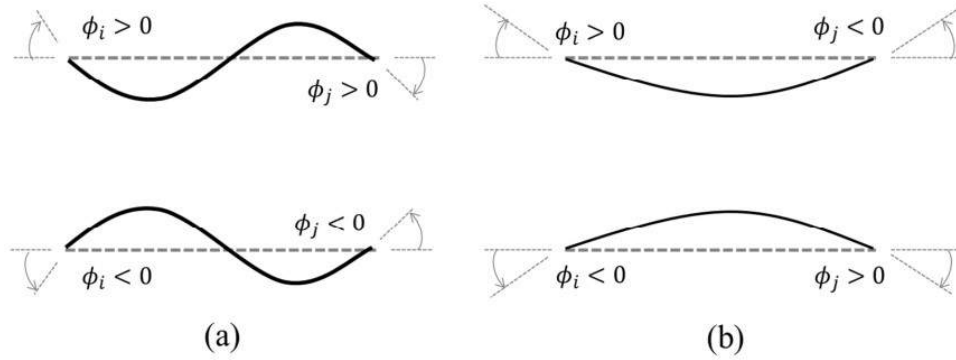
Segundo Flórez-López et al. (2015), a matriz generalizada de deslocamento nodal descreve apenas componentes do movimento do corpo rígido nodal, ou seja, não fornecem informações a respeito do comportamento do material ou sobre modificações ocorridas na estrutura. A Figura 25b ilustra as deformações do elemento b , entre os nós i e j , definida pela equação (3.8), em que ϕ_i^b e ϕ_j^b são as rotações relativas e δ_b o alongamento do elemento.

$$\{\Phi\}_b = \begin{Bmatrix} \phi_i^b \\ \phi_j^b \\ \delta_b \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Se o elemento b sofrer apenas movimento do corpo rígido, a matriz de deformação generalizada $\{\Phi\}_b$ é nula. Se houver modificação na forma do elemento, as deformações generalizadas indicam a nova forma do elemento. A Figura 26 ilustra as possíveis mudanças de formato de acordo com os sinais de cada componente de rotação. Os termos ϕ_i^b e ϕ_j^b especificam o comportamento de flexão do elemento b . Se ϕ_i^b e ϕ_j^b apresentarem os mesmos sinais, o elemento b terá deformação em forma de “S” (Figura 26a). Se ϕ_i^b e ϕ_j^b apresentarem

sinais diferentes, o elemento b terá deformação em forma de “C” (Figura 26b). O sinal de δ_b indica se o elemento b é alongado ou encurtado de seu comprimento original (AMORIM, 2016).

Figura 26 – Formas de deformações do elemento b de acordo com os sinais das rotações relativas



Fonte: Amorim (2016)

As deformações do elemento finito são relacionadas com os deslocamentos por meio das equações cinemáticas, como mostra a equação (3.9). A matriz $[B(q)]_b$ representa a matriz de transformação cinemática no sistema de coordenadas locais, obtida por meio de relações geométricas, conforme equação (3.10), em que α_b é o ângulo de inclinação entre o eixo do elemento finito e o sistema de coordenadas de referência (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

$$\{d\Phi\}_b = [B(q)]_b \{dq\}_b \quad (3.9)$$

$$[B(q)]_b = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 \\ \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 \\ -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Normalmente, uma estrutura submetida somente a cargas de serviço não precisa de análise não linear. Por outro lado, sobrecargas podem representar uma demanda significativa na estrutura, exigindo análises não só não lineares, mas inelásticas também. Desse modo, as equações podem ser novamente formuladas em termos das mesmas variáveis, mas em função do tempo. As variáveis são definidas em um intervalo de tempo que é fixo arbitrariamente entre zero e um instante final (T), conforme equação (3.11) (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

$$\{U\} = \{U(t)\}; \{\Phi\}_b = \{\Phi(t)\}_b; \{P\} = \{P(t)\}; \{M\}_b = \{M(t)\}_b \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (3.11)$$

De acordo com Flórez-López et al. (2015), pressupõe-se que os valores dos deslocamentos, deformações, reações e tensões são conhecidos no tempo $t = 0$. Dessa forma, o problema pode ser resolvido usando um procedimento de passo a passo, em que a variável t é substituída por instantes particulares escolhidas pelo analista: $(0, t_1, t_2, \dots, t_r, \dots, T)$. Este algoritmo é chamado de passo a passo porque os valores são calculados sequencialmente, ou seja, as incógnitas são calculadas no instante t_1 , em seguida, em t_2 e assim por diante até que o tempo final (T) seja alcançado. Portanto, a equação cinemática (3.9) pode ser reescrita pela equação (3.12).

$$\{\Delta\Phi\}_b = \{\Phi_{t=t_r} - \Phi_{t=t_{r-1}}\} \cong [B_E(U_{t=t_r})]_b \{\Delta U\} \quad (3.12)$$

Nesta expressão, os termos no instante t_{r-1} são conhecidos, eles foram computados no passo precedente. Dessa forma, apenas os valores no instante t_r têm que ser calculados. Além disso, a matriz de transformação cinemática $[B_E(U_{t=t_r})]_b$ não é conhecida, uma vez que depende dos deslocamentos desconhecidos, esse tipo de procedimento é conhecido como implícito (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

A aproximação da equação (3.12) melhora à medida que o tamanho do passo de tempo diminui. Para pequenos intervalos de tempo, a equação diferencial (3.9) obtém os mesmos resultados da equação algébrica (3.12). Por outro lado, grandes intervalos de tempo podem produzir diferenças significativas entre ambas expressões. Desse modo, o analista deve encontrar um compromisso satisfatório entre precisão e custo computacional para cada aplicação específica (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

3.3 Equação de equilíbrio

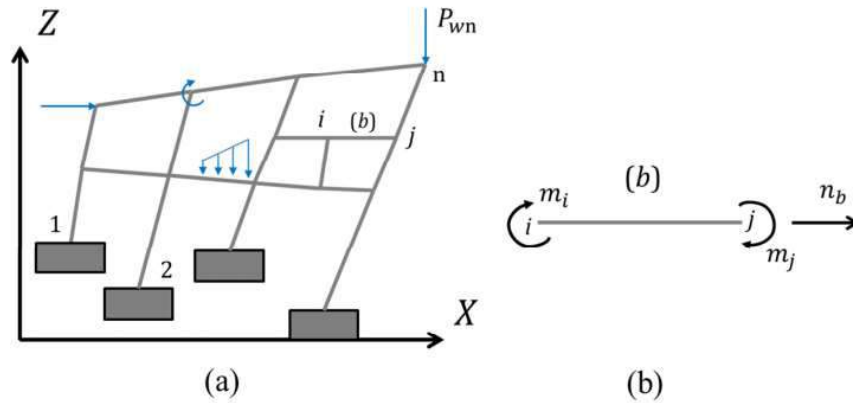
Para obter a equação de equilíbrio da estrutura, parte-se do princípio dos trabalhos virtuais, no qual o equilíbrio estático da estrutura pode ser descrito igualando o trabalho virtual externo com o interno, conforme mostra a equação (3.13). O trabalho virtual externo é descrito pelas forças externas, enquanto o trabalho virtual interno é descrito pelas deformações generalizadas e forças inerciais (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

$$W_{def}^* + W_{ine}^* = W_{ext}^* \quad (3.13)$$

A Figura 27a mostra um pórtico plano com forças e momentos concentrados aplicados nos nós e carregamento distribuído nos elementos. Na análise estrutural, é comum substituir o carregamento distribuído no elemento por forças equivalentes aplicadas nos nós. Desta forma,

todas as cargas externas podem ser reunidas em uma matriz de forças externas, conforme mostra a equação (3.14) (AMORIM, 2016).

Figura 27 – (a) Forças externas aplicadas ao pórtico plano; (b) esforços generalizados do elemento b



Fonte: Amorim (2016)

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{u1} \\ P_{w1} \\ P_{\theta1} \\ P_{u2} \\ \vdots \\ P_{un} \\ P_{wn} \\ P_{\theta n} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

O primeiro índice está relacionado à direção de referência global das forças: u para forças horizontais, w para forças verticais e θ para momentos fletores. O segundo índice corresponde ao nó em que a força está aplicada.

O trabalho virtual externo é definido pela equação (3.15).

$$W_{ext}^* = \{U^*\}^T \{P\} \quad (3.15)$$

De acordo com Amorim (2016), para obter a expressão do trabalho virtual de deformação para o elemento de pórtico, a matriz de tensões generalizadas $\{M\}_b$ é introduzida, representada pela equação (3.16). Nesta matriz, m_i^b e m_j^b são os momentos fletores nas extremidades do elemento e n_b a força axial (Figura 27b).

$$\{M\}_b = \begin{Bmatrix} m_i^b \\ m_j^b \\ n_b \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Desta forma, considerando a matriz de deformação generalizada conjugada $\{\Phi^*\}_b$, a expressão do trabalho virtual de deformação pode ser obtida através da equação (3.17).

$$W_{def}^* = \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{M\}_b \quad (3.17)$$

Como o modelo implementado é quase estático, pode-se desprezar o efeito das forças inerciais. Portanto, a equação de equilíbrio pode ser obtida substituindo a equação (3.15) e (3.17) na (3.13), conforme mostra a equação (3.18) (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

$$\sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{M\}_b = \{U^*\}^T \{P\} \Rightarrow \sum_{b=1}^m [B_E^0]_b^T \{M\}_b = \{P\} \quad (3.18)$$

3.4 Lei constitutiva para pórticos planos rotulados

Segundo Flórez-López et al. (2015), pela hipótese de equivalência em deformações da mecânica do dano contínuo, as deformações generalizadas $\{\Phi\}_b$ podem ser descritas pela soma das parcelas elástica, plástica e devido ao dano, $\{\Phi^e\}_b$, $\{\Phi^p\}_b$ e $\{\Phi^d\}_b$, respectivamente, como mostra a equação (3.19).

$$\{\Phi\}_b = \{\Phi^e\}_b + \{\Phi^p\}_b + \{\Phi^d\}_b \quad (3.19)$$

A lei constitutiva relaciona a matriz de deformações generalizadas $\{\Phi\}_b$ com a matriz de tensões generalizadas $\{M\}_b$ (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015), como mostra a equação (3.20).

$$\{\Phi - \Phi^p\}_b = [F(D)]_b \{M\}_b + \{\Phi^0\}_b \quad (3.20)$$

onde $\{\Phi^0\}_b$ é a matriz de deformações iniciais e $[F(D)]_b$ é a matriz de flexibilidade que depende dos coeficientes de dano, conforme equação (3.21).

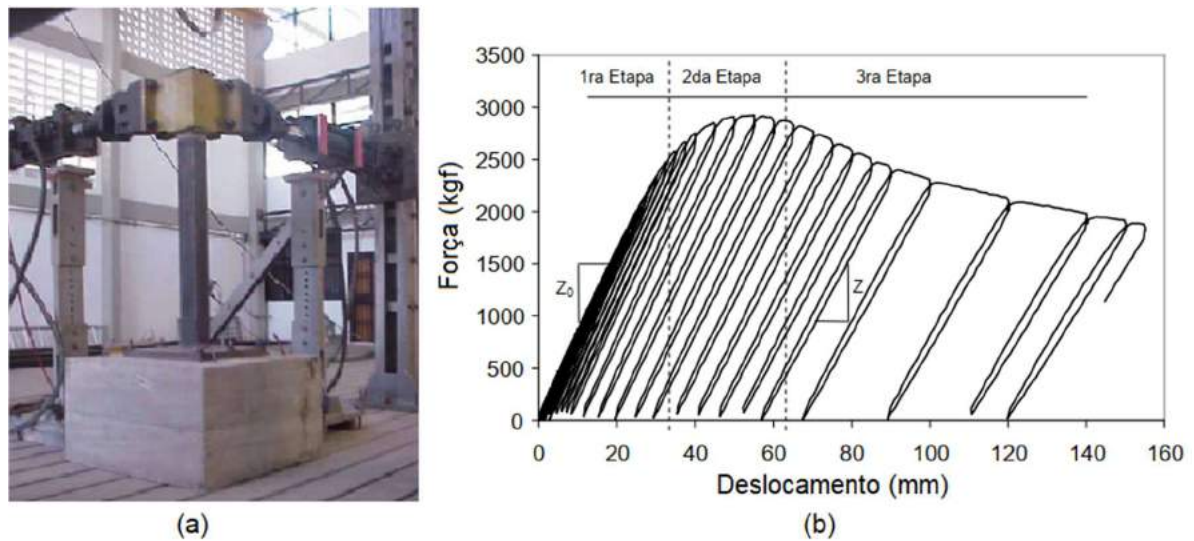
$$[F(D)]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3(1-d_i)EI_b} & -\frac{L_b}{6EI_b} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3(1-d_j)EI_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{AE_b} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Pela equação (3.21), é possível observar que caso os parâmetros de dano sejam iguais a zero (elemento íntegro), a matriz de flexibilidade $[F(D)]_b$ coincide com a de um elemento elástico. Por outro lado, se os parâmetros de dano tenderem a um (elemento totalmente danificado), as rótulas inelásticas passam a apresentar o comportamento de rótulas perfeitas.

3.5 Lei de plasticidade

Guerrero et al. (2009) realizou um ensaio em perfil metálico com seção transversal retangular vazada, submetido a um carregamento monotônico uniaxial (Figura 28a). Durante o ensaio, foi possível observar três etapas bem definidas na curva força-deslocamento, como mostra a Figura 28b. A primeira etapa com um comportamento elástico linear, em que as deformações são totalmente reversíveis, ou seja, não há deformações permanentes após o descarregamento. Na segunda etapa o elemento exibe um comportamento elastoplástico com endurecimento linear, em que grandes deformações plásticas evoluem sob forças aproximadamente constantes. Por fim, a terceira etapa é caracterizada pela degradação significativa da rigidez e resistência, em que o início deste último estágio é desencadeado pelo aparecimento da flambagem local. A degradação das propriedades mecânicas do elemento aumenta com a evolução da flambagem local.

Figura 28 – (a) Ensaio em perfil metálico com seção transversal retangular vazada; (b) Comportamento do elemento durante o ensaio monotônico



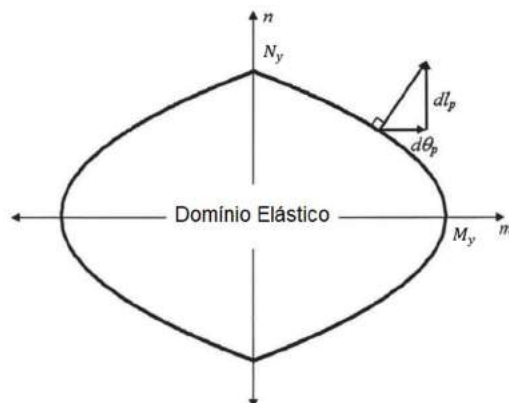
Fonte: Adaptado de Guerrero et al. (2009)

De acordo com Guerrero et al. (2007), o comportamento plástico de uma rótula inelástica é definido através da função de escoamento, conforme equação (3.22).

$$f_i = \left(\frac{N}{N_y} \right)^{e1} + \left(\frac{m_i}{M_y} \right)^{e2} - 1; f_j = \left(\frac{N}{N_y} \right)^{e1} + \left(\frac{m_j}{M_y} \right)^{e2} - 1 \quad (3.22)$$

Onde N_y é a carga de escoamento axial e M_y é o momento de escoamento da seção. As constantes $e1$ e $e2$ são parâmetros dependentes do elemento. Normalmente, as constantes são escolhidas iguais a 2 e o domínio elástico torna-se uma elipse no espaço n versus m , como mostra a Figura 29 (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

Figura 29 – Domínio elástico para uma seção transversal retangular



Fonte: Adaptado de Flórez-López et al. (2015)

Na mecânica do dano concentrado, a função de escoamento de uma rótula inelástica com dano é obtida pela hipótese de tensão equivalente. Portanto, a função de escoamento de uma rótula inelástica danificada pode ser obtida pela substituição, na equação (3.22), dos momentos por seus valores efetivos (considerando-se o dano). O conceito de momento efetivo é semelhante à ideia de tensão efetiva introduzida na mecânica do dano contínuo, conforme a equação (3.23) (GUERRERO et al., 2007).

$$\bar{m}_i = \frac{m_i}{1 - d_i}; \quad \bar{m}_j = \frac{m_j}{1 - d_j} \quad (3.23)$$

Desta forma, a função de escoamento de uma rótula inelástica com flambagem local pode ser descrita pela equação (3.24).

$$f_i = \left(\frac{N}{N_y} \right)^{e1} + \left(\frac{m_i}{M_y(1 - d_i)} \right)^{e2} - 1; \quad f_j = \left(\frac{N}{N_y} \right)^{e1} + \left(\frac{m_j}{M_y(1 - d_j)} \right)^{e2} - 1 \quad (3.24)$$

A função de escoamento indica se a rótula inelástica está travada ou ativa. No entanto, não determina qual a componente dominante no elemento, se é a rotação plástica ou alongamento plástico. Por outro lado, imagina-se que um elemento com grandes forças axiais e baixos momentos fletores, o alongamento plástico deve ser dominante na articulação. De forma semelhante, caso o elemento possua pequenas forças axiais e grandes momentos fletores, a rotação plástica deverá ser a componente dominante (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

Diante disto, para obter a lei de evolução de deformação, uma equação adicional chamada regra de normalidade foi introduzida, definida pela equação (3.25). Esta expressão completa a descrição matemática do comportamento de uma rótula inelástica (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

$$d\phi_i^p = d\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial m_i}; \quad d\phi_j^p = d\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial m_j}; \quad d\delta_p = d\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial n} + d\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial n} \quad (3.25)$$

Onde λ_i e λ_j são os multiplicadores plásticos das rótulas inelásticas i e j , respectivamente. Os multiplicadores plásticos são calculados pela condição de consistência, conforme equação (3.26).

$$\begin{cases} d\lambda_i = 0 \text{ se } f_i < 0 \text{ (rótula } i \text{ travada)} \\ f_i = 0 \text{ se } d\lambda_i \neq 0 \text{ (rótula } i \text{ ativa)} \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} d\lambda_j = 0 \text{ se } f_j < 0 \text{ (rótula } j \text{ travada)} \\ f_j = 0 \text{ se } d\lambda_j \neq 0 \text{ (rótula } j \text{ ativa)} \end{cases}$$

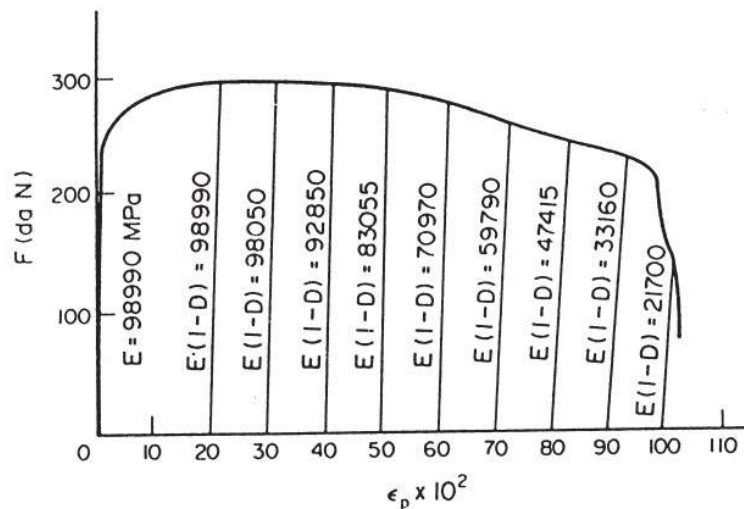
3.6 Lei de evolução da flambagem local

Como a variável dano foi introduzida na lei da elasticidade e na função de escoamento, é necessário que seja inserido no modelo uma nova equação, denominada de lei de evolução de dano, definida a partir de resultados experimentais. Portanto, um método para a medição experimental do dano deve ser proposto. Como uma determinação direta, usando a equação (3.2), não é adequada para este propósito, um procedimento indireto deve ser estabelecido (INGLESSIS et al., 1999).

Segundo Inglessis et al. (1999), entre as possíveis alternativas indiretas propostas por Lemaitre e Dufailly (1987), a mais conveniente é o método da variação do módulo de elasticidade, conforme a equação (3.27), em que \bar{E} é o módulo de elasticidade efetivo do material danificado e pode ser medido num ensaio uniaxial com descargas, como mostra a Figura 30.

$$d = 1 - \frac{\bar{E}}{E} \quad (3.27)$$

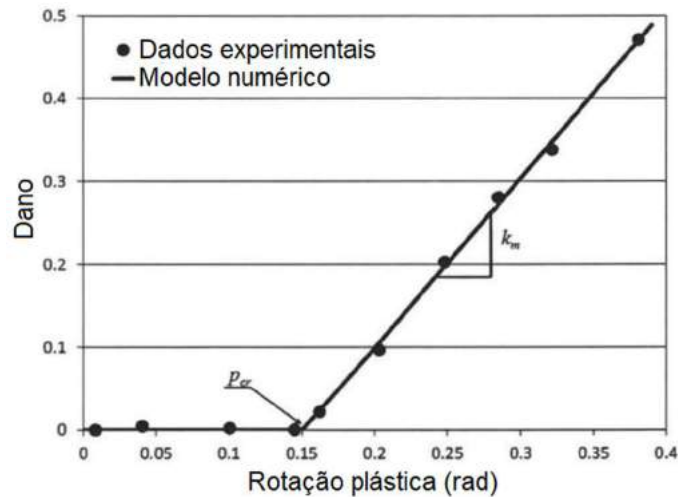
Figura 30 – Variação do módulo de elasticidade com dano



Fonte: Lemaitre e Dufailly (1987, apud Inglessis et al., 1999)

Segundo Flórez-López et al. (2015), a equação (3.27) permite determinar a curva indicada na Figura 31. Portanto, a lei de evolução da flambagem local pode ser descrita pela equação (3.28),

Figura 31 – Curva dano de flambagem local x Rotação plástica

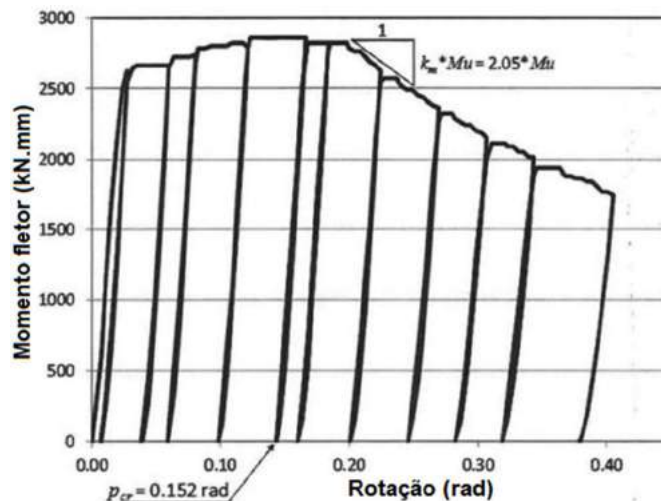


Fonte: Adaptado de Flórez-López et al. (2015)

$$d_i = k_m \langle \phi_i^p - p_{cr} \rangle_+ \quad (3.28)$$

Onde p_{cr} é a rotação plástica crítica que inicia a flambagem local, k_m é a inclinação da reta indicada na Figura 31 e $\langle \rangle_+$ indica que apenas os valores maiores que zero são tomados. Estes parâmetros podem ser identificados a partir do gráfico momento fletor *versus* rotação, como mostra na Figura 32.

Figura 32 – Gráfico momento fletor x rotação



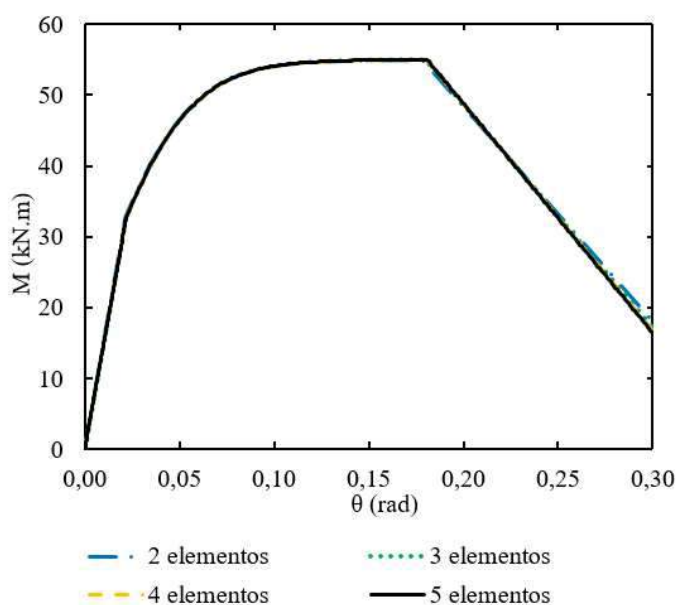
Fonte: Adaptado de Flórez-López et al. (2015)

4 MODELOS DE DANO CONCENTRADO PROPOSTOS

Neste trabalho, os modelos de dano concentrado foram desenvolvidos com o auxílio de um *software* de interpretação simbólica, o que permitiu a realização de cálculos não somente numéricos, mas também com símbolos, fórmulas, expressões e equações.

Para avaliar o comportamento da curva momento (M) *versus* rotação (θ) para diferentes números de elementos finitos, foram elaborados quatro modelos numéricos com dois, três, quatro e cinco elementos, conforme Figura 33.

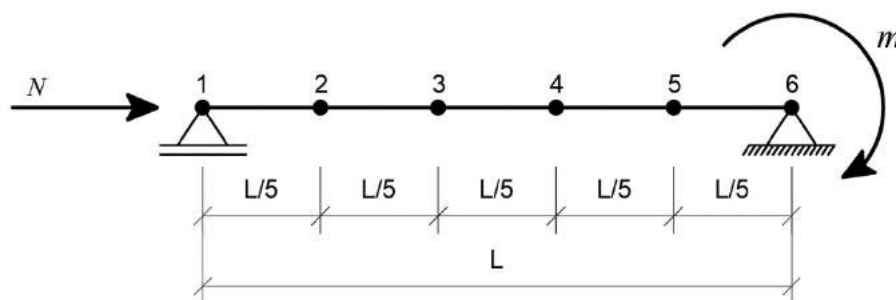
Figura 33 – Comportamento da curva M *versus* θ para diferentes números de elementos



Fonte: O autor (2020)

Diante disso, chegou-se à conclusão que a quantidade de número de elementos finitos na discretização do domínio tinha pouca influência nos resultados numéricos deste modelo. Sendo assim, para todos os modelos de dano concentrado, usou-se uma malha constituída por seis nós e cinco elementos finitos, com comprimentos iguais a $L/5$. No carregamento, aplicou-se uma força de compressão axial (N) no nó 1 e um carregamento monotônico de momentos fletores (m) no nó 6, como mostra a Figura 34.

Figura 34 – Malha de elementos finitos para o modelo de dano concentrado



Fonte: O autor (2020)

Nos dados de entrada do programa, é necessário que o usuário defina os valores do módulo de elasticidade (E) e tensão de escoamento (f_y) do aço, largura (b), espessura (t), área (A) e momento de inércia (I) da seção transversal, comprimento da amostra (L), razão de força axial (n_y), inclinação da reta de evolução de dano (k_m) e a rotação final (θ_{final}) em que o ensaio é finalizado.

4.1 Análise paramétrica

O estudo paramétrico apresentado nessa seção tem como objetivo avaliar o comportamento da curva momento (M) *versus* rotação (θ), alterando os valores do momento último (M_u), rotação plástica crítica (p_{cr}) e a inclinação da reta de evolução do dano (k_m). Ressalta-se que esses parâmetros são obtidos experimentalmente e este trabalho propõe adicionar no modelo de dano concentrado equações baseadas em Yamada et al. (1993, 2012) e AISC (2016) de forma que possam ser calculados analiticamente.

Diante disso, foram mantidos constantes os valores do módulo de elasticidade (E) e tensão de escoamento (f_y) do aço, largura (b), espessura (t), área (A) e momento de inércia (I) da seção transversal, comprimento da amostra (L), razão de força axial (n_y) e a rotação máxima (θ_{final}), como mostra a Tabela 6.

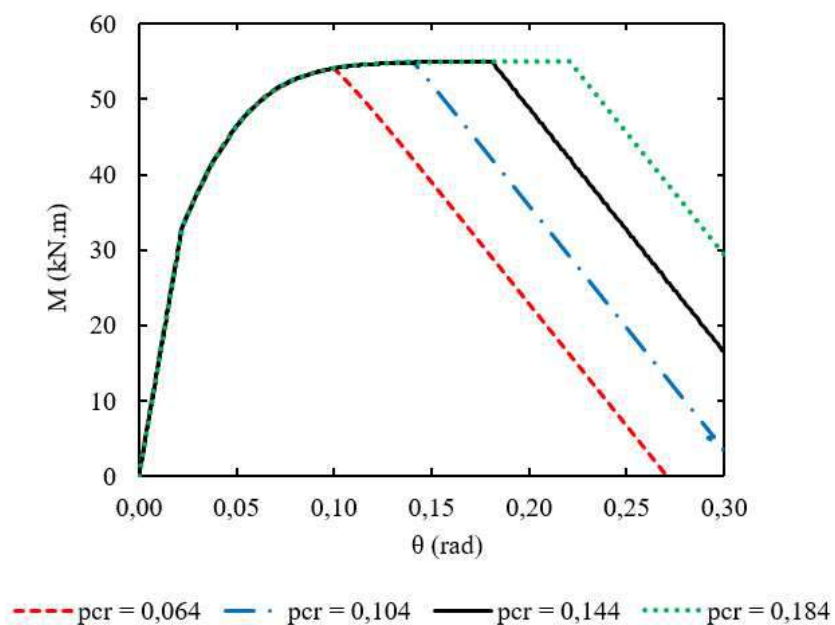
Tabela 6 – Valores dos parâmetros mantidos constantes

E (N/mm ²)	f_y (N/mm ²)	b (mm)	t (mm)	A (mm ²)	I (x 10 ⁴ mm ⁴)	L (mm)	n_y	θ_{final} (rad)
201800	405,2	125,0	5,827	2707	632,4	2400	0,20	0,30

Fonte: O autor (2020)

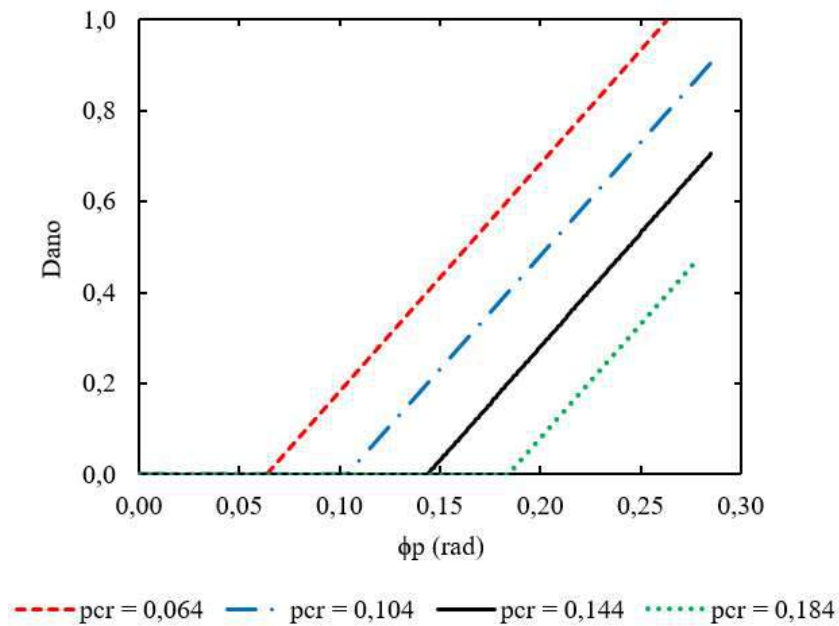
Na primeira análise, foram fixados os valores de (M_u) e (k_m) em 55 kN.m e 5, respectivamente. Desse modo, variou-se apenas a (p_{cr}) , em que foram adotados os valores de 0,064; 0,104; 0,144 e 0,184 rad, como mostra a Figura 35.

Figura 35 – Comportamento da curva M versus θ para diferentes valores de p_{cr}



Percebe-se que quanto maiores os valores da (p_{cr}) , maiores serão as deformações plásticas até que se inicie a flambagem local. Dessa forma, o regime elastoplástico do elemento será maior. Este comportamento também pode ser observado na Figura 36.

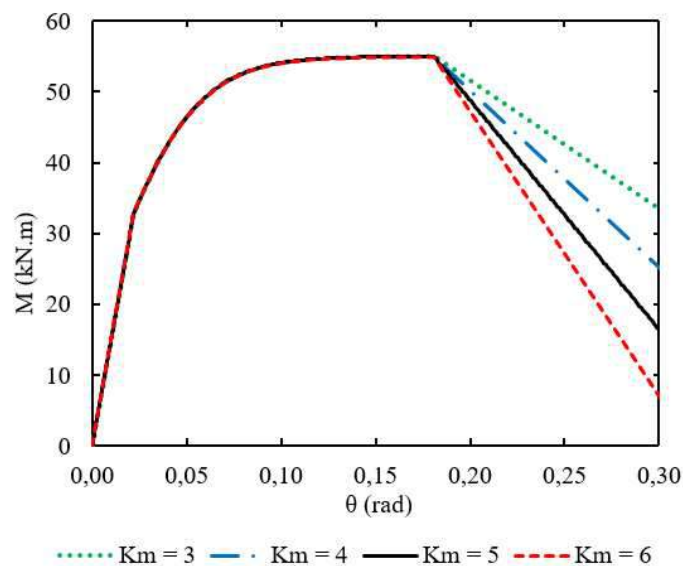
Figura 36 – Comportamento da curva Dano versus ϕ_p para diferentes valores de p_{cr}



Fonte: O autor (2020)

Na segunda análise, foram fixados os valores de (M_u) e (p_{cr}) em 55 kN.m e 0,144 rad, respectivamente. Dessa maneira, variou-se apenas a (k_m), em que foram adotados os valores de 3, 4, 5 e 6, como mostra a Figura 37.

Figura 37 - Comportamento da curva M versus θ para diferentes valores de k_m

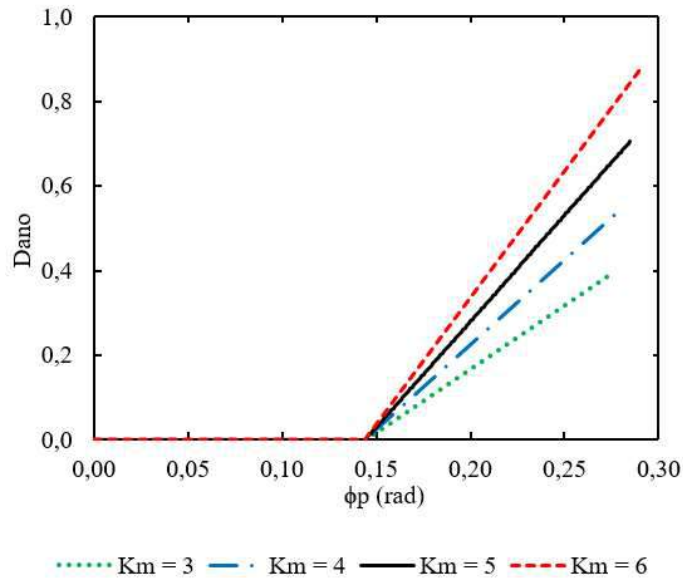


Fonte: O autor (2020)

Observa-se que os valores de (k_m) não influenciam na rotação em que a flambagem local tem início, sendo igual por conta do valor fixo da (p_{cr}) em 0,144 rad. O parâmetro (k_m)

está relacionado com o intervalo de deterioração do material, em que quanto maior os seus valores, maior será o dano e consequentemente a perda de rigidez do elemento, conforme Figura 38.

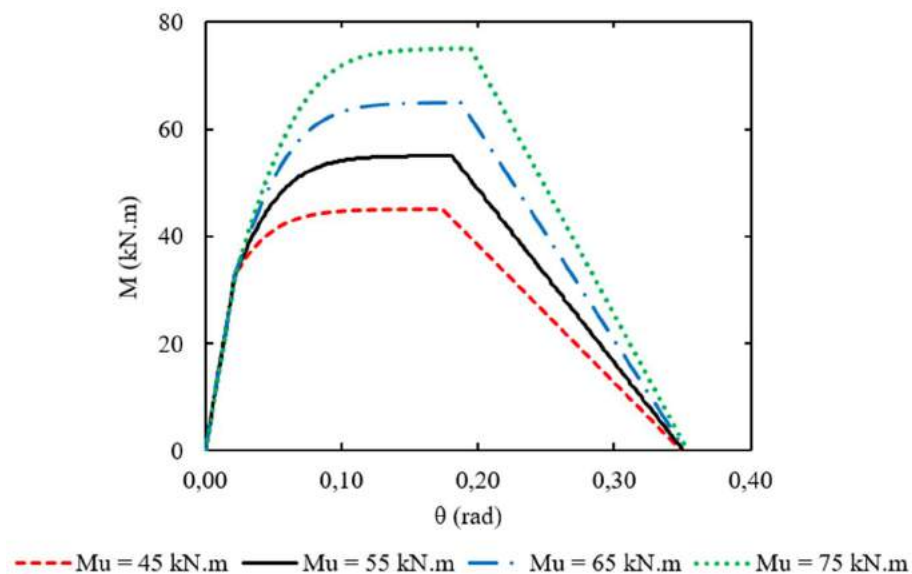
Figura 38 - Comportamento da curva Dano versus ϕ_p para diferentes valores de k_m



Fonte: O autor (2020)

Na terceira análise, foram fixados os valores de (p_{cr}) e (k_m) em 0,144 rad e 5, respectivamente. Dessa maneira, variou-se apenas o (M_u), os quais foram adotados os valores de 45, 55, 65 e 75 kN.m, como mostra a Figura 39.

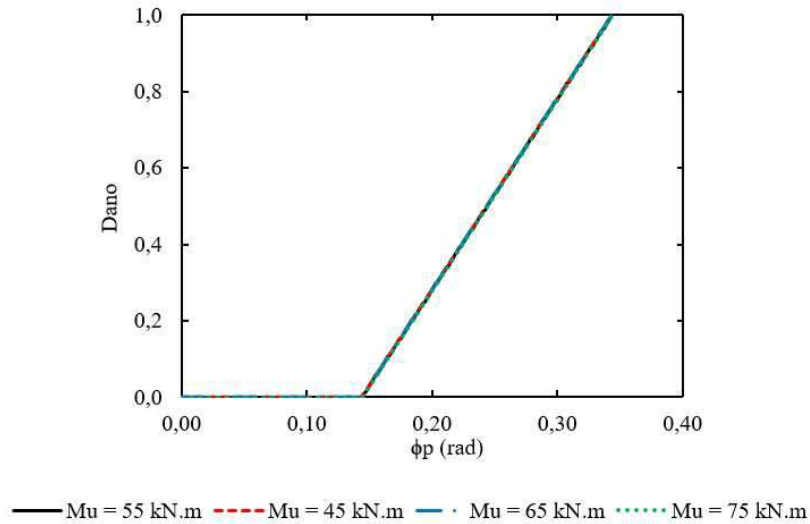
Figura 39 - Comportamento da curva M versus θ para diferentes valores de M_u



Fonte: O autor (2020)

Percebe-se que para o mesmo (p_{cr}), quanto maiores os valores da (M_u), maiores serão as rotações últimas (θ_u). Além disso, a perda de resistência será maior mesmo com o (k_m) sendo igual a 5 para todas simulações, conforme Figura 40.

Figura 40 - - Comportamento da curva Dano versus ϕ_p para diferentes valores de M_u



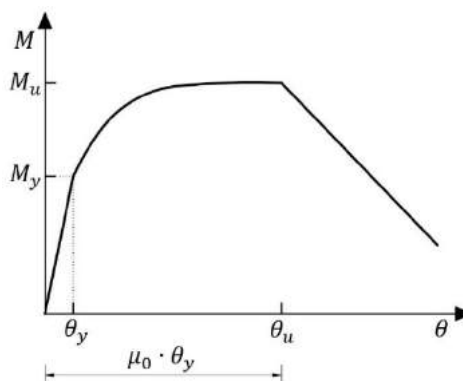
Fonte: O autor (2020)

4.2 Modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012)

Neste modelo proposto, a equação (4.1) foi adicionada no modelo de dano concentrado, em que a rotação de escoamento do nó (θ_y) multiplica o fator de ductilidade de deformação (μ_0) calculado pela equação (2.4) de Yamada et al. (1993). Dessa forma, obtém-se o valor da rotação última (θ_u), onde inicia-se a flambagem local, como mostra a Figura 41.

$$\theta_u = \mu_0 \cdot \theta_y \quad (4.1)$$

Figura 41 – Relação entre a rotação de escoamento (θ_y) e última (θ_u) do nó



Fonte: O autor (2020)

Com o valor da rotação última (θ_u), o algoritmo do modelo de dano concentrado calcula a rotação plástica crítica (p_{cr}), utilizada na lei de evolução da flambagem local, expressa pela equação (3.28). Para a inclinação da reta de evolução do dano (k_m), foi adotado o valor de 5.

A equação (4.2) descreve a função de escoamento que indica se a rótula inelástica está travada ou ativa. Esta função é baseada na equação (3.24), em que as constantes $e1$ e $e2$ foram escolhidas iguais a 1.

$$f_i = \left(\frac{N}{N_y} \right) + \left(\frac{m_i}{M_y(1 - d_i)} \right) - 1; f_j = \left(\frac{N}{N_y} \right) + \left(\frac{m_j}{M_y(1 - d_j)} \right) - 1 \quad (4.2)$$

Para obter o valor do momento último (M_u), este modelo utilizou a equação (2.11) proposta por Yamada et al. (2012), em que o momento de escoamento (M_y) corresponde a 60% do valor de (M_u).

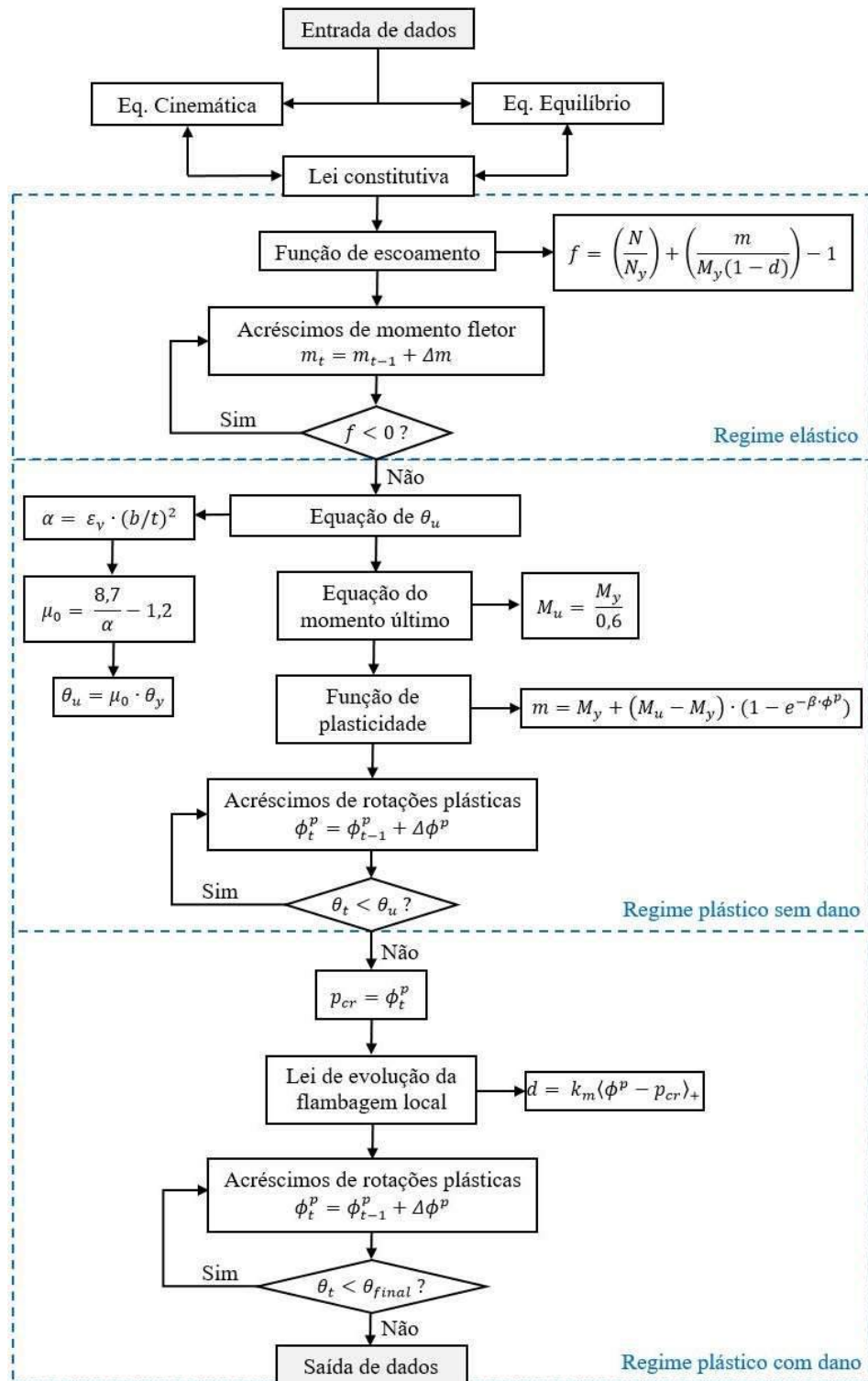
Para descrever o comportamento não linear do regime plástico, adotou-se a equação (4.3) de Lemaitre e Chaboche (1985), em que o momento tenderá exponencialmente ao momento último (M_u) com acréscimos de rotações plásticas (ϕ_p). Essa equação também foi adotada por Febres et al. (2003) na modelagem de flambagem local em estruturas tubulares de aço submetidas a carregamento cíclico. O parâmetro (β) pode ser obtido experimentalmente. Entretanto, este trabalho adotou (β) igual a 50 para todas as simulações numéricas.

$$m = M_y + (M_u - M_y) \cdot (1 - e^{-\beta \cdot \phi_p}) \quad (4.3)$$

A Figura 42 apresenta um diagrama das rotinas implementadas no modelo. Após o usuário definir os valores dos dados de entrada, são calculadas as equações cinemáticas, de equilíbrio e as leis constitutivas. O modelo utiliza um procedimento de passo a passo, em que a variável (t) é substituída por instantes particulares ($0, t_1, t_2, \dots, t_r, \dots, T$), calculando os valores sequencialmente. Dessa maneira, as equações são novamente formuladas em termos das mesmas variáveis, mas em função do tempo, considerando as deformações e deslocamentos do passo anterior. No regime elástico, o algoritmo realiza acréscimos de taxas de momento fletor até ativar a rótula inelástica, utilizando a equação (4.2). Em seguida, são calculados os valores do momento último (M_u) e rotação última (θ_u) através das equações (2.11) e (4.1), respectivamente. No regime plástico, com a rótula inelástica ativa, o algoritmo realiza acréscimos de taxas de rotações plásticas até o instante em que se inicia a flambagem local. Neste passo, é calculado o parâmetro (p_{cr}) da lei de evolução da flambagem local. Em seguida,

no regime plástico com dano, são feitos novos acréscimos de taxas de rotações plásticas, em que a variável de dano é computada até finalizar o ensaio.

Figura 42 - Diagrama das rotinas implementadas no modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012)



Fonte: O autor (2020)

4.3 Modelo baseado na AISC (2016)

A diferença entre este modelo e o baseado em Yamada et al. (1993, 2012), apresentado na seção 4.2, são as equações da função de escoamento e momento último (M_u), em que ambas foram baseadas na AISC (2016). Dessa maneira, os procedimentos para calcular a rotação plástica crítica (p_{cr}) e para descrever o comportamento não linear do regime plástico são os mesmos do modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012). Além disso, a inclinação da reta de evolução do dano (k_m) também foi adotada igual a 5.

Para a função de escoamento, foram utilizadas as expressões de interação indicadas na AISC (2016). Como na mecânica do dano concentrado, a função de escoamento de uma rótula inelástica com dano é obtida pela hipótese de tensão equivalente, os momentos das equações (2.46) e (2.47) foram substituídos por seus valores efetivos, considerando a variável de dano, conforme equações (4.4) e (4.5).

$$f = \frac{N}{2N_y} + \left(\frac{m}{M_y(1 - d_i)} \right) - 1 \quad \text{quando } \frac{N}{N_y} < 0,2 \quad (4.4)$$

$$f = \frac{N}{N_y} + \frac{8}{9} \left(\frac{m}{M_y(1 - d_i)} \right) - 1 \quad \text{quando } \frac{N}{N_y} \geq 0,2 \quad (4.5)$$

Para calcular o valor do momento último (M_u), o modelo utiliza as equações (4.6) e (4.7) baseadas da AISC (2016), em que o momento de plastificação total (M_p) é obtido através da equação (2.34) para seções com mesas e almas compactas. Desse modo, é considerado que o momento último (M_u) acontece quando ocorre a plastificação de toda a seção transversal.

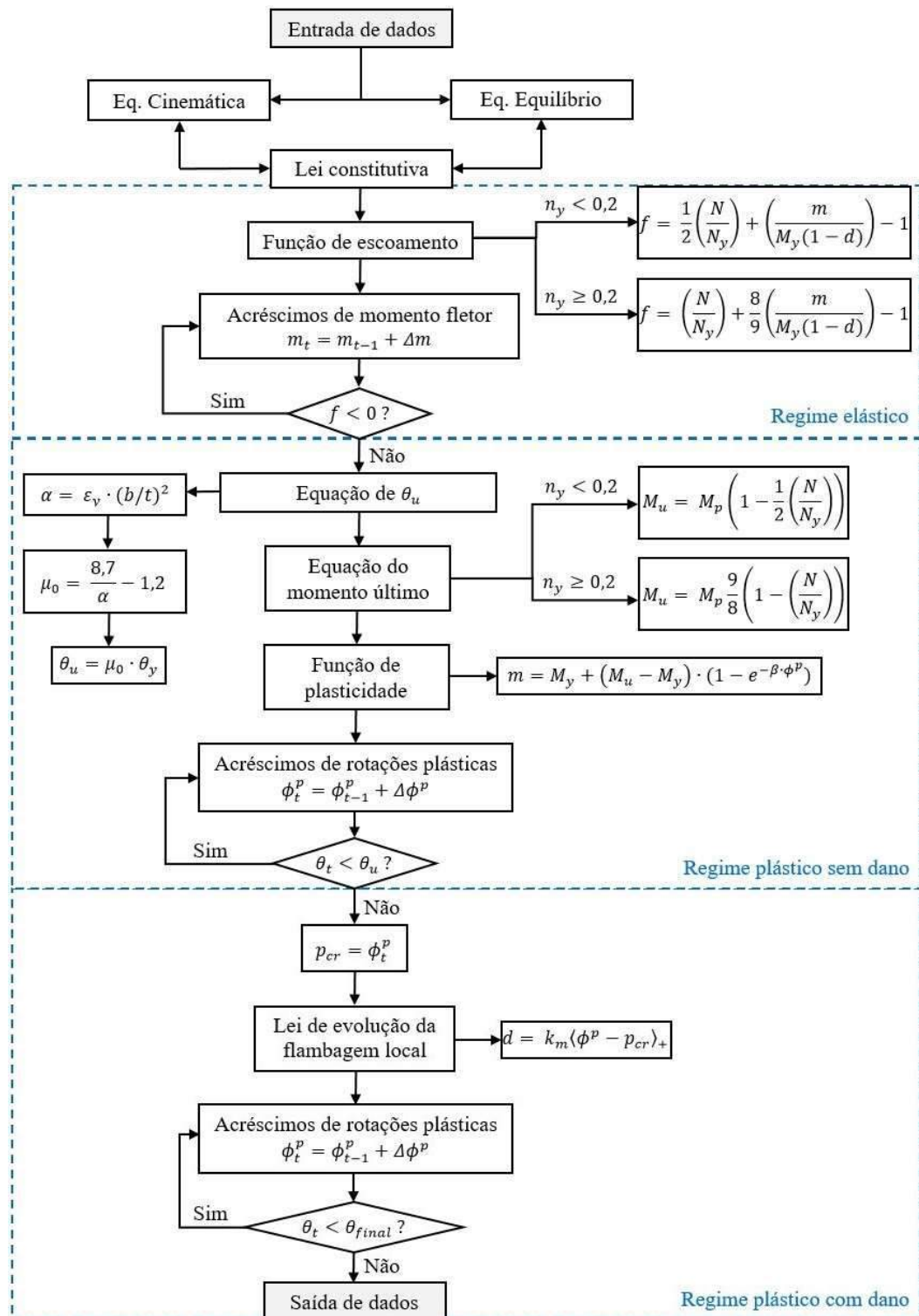
$$M_u = M_p \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{N}{N_y} \right) \right) \quad \text{quando } \frac{N}{N_y} < 0,2 \quad (4.6)$$

$$M_u = M_p \frac{9}{8} \left(1 - \left(\frac{N}{N_y} \right) \right) \quad \text{quando } \frac{N}{N_y} \geq 0,2 \quad (4.7)$$

A Figura 43 apresenta um diagrama das rotinas implementadas no modelo. Após o usuário definir os valores dos dados de entrada, são calculadas as equações cinemáticas, de equilíbrio e as leis constitutivas. O modelo utiliza um procedimento de passo a passo, em que a variável (t) é substituída por instantes particulares ($0, t_1, t_2, \dots, t_r, \dots, T$), calculando os valores sequencialmente. Dessa maneira, as equações são novamente formuladas em termos das mesmas variáveis, mas em função do tempo, considerando as deformações e deslocamentos do passo anterior. No regime elástico, o algoritmo realiza acréscimos de taxas de momento fletor até ativar a rótula inelástica, utilizando as equações (4.4) e (4.5). Em seguida, é calculado

o valor do momento último (M_u) através das equações (4.6) e (4.7); e da rotação última (θ_u) com a equação (4.1). No regime plástico, com a rótula inelástica ativa, o algoritmo realiza acréscimos de taxas de rotações plásticas até o instante em que se inicia a flambagem local. Neste passo, é calculado o parâmetro (p_{cr}) da lei de evolução da flambagem local. Em seguida, no regime plástico com dano, são feitos novos acréscimos de taxas de rotações plásticas, em que a variável de dano é computada até finalizar o ensaio.

Figura 43 - Diagrama das rotinas implementadas no modelo baseado na AISC (2016)



Fonte: O autor (2020)

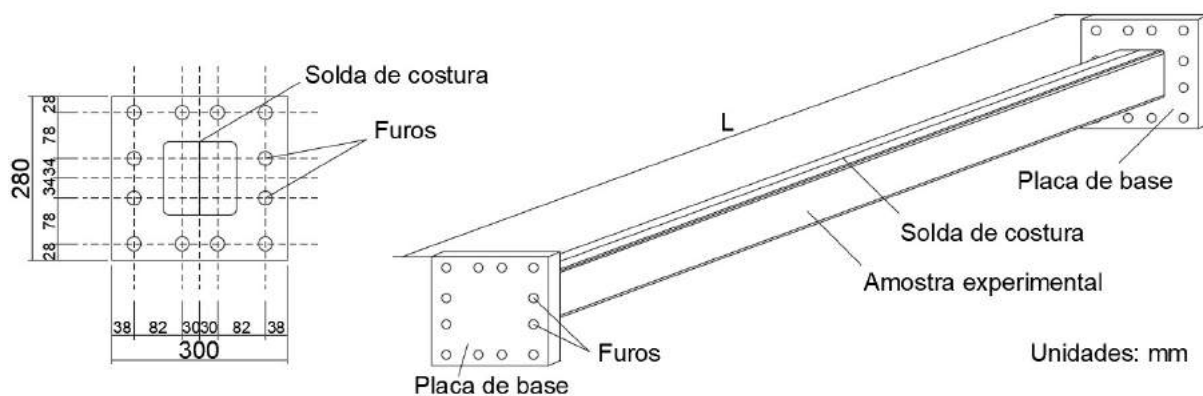
5 EXPERIMENTOS DE KAZUYA (2017)

Kazuya (2017) realizou experimentos para compreender a capacidade resistente e as propriedades da deformação de perfis de seção quadrada vazada submetidos à força de compressão axial e momento de flexão monotônico. Utilizou-se como parâmetros experimentais: a razão de força axial (n_y), esbeltez do corpo de prova (λ) e a razão da largura e espessura (b/t) dos perfis. Em seguida, investigou-se o efeito da combinação da razão de força axial e da esbeltez no momento fletor máximo e na capacidade de deformação plástica.

5.1 Propriedades do material

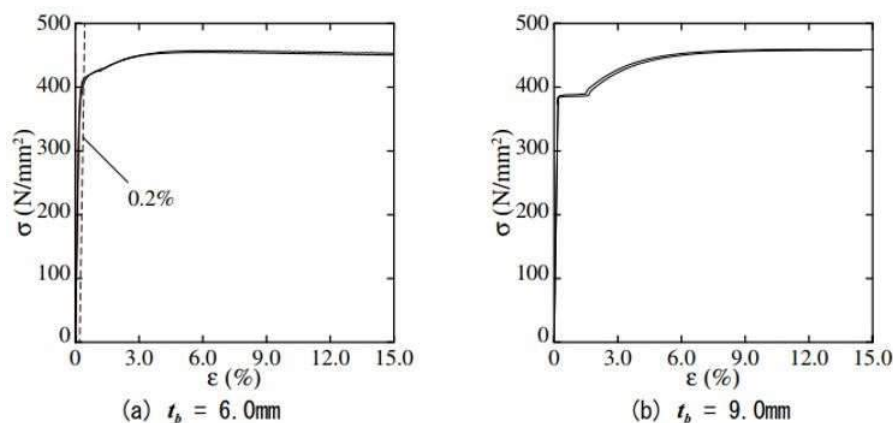
O material utilizado no experimento foi o STKR400, um tubo de aço quadrado vazado formado a frio com tensão de escoamento igual a 400 MPa. As formas das seções transversais foram: 125 x 125 x 6 mm e 150 x 150 x 9 mm. As razões das larguras e espessuras dos perfis são 20,8 e 16,7, respectivamente. A Figura 44 mostra uma visão geral da amostra, em que foram soldadas duas placas de base com 32 mm de espessura nas extremidades do corpo de prova para instalá-lo no equipamento de teste (KAZUYA, 2017).

Figura 44 – Visão geral do corpo de prova



Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

A Figura 45 mostra os resultados obtidos no ensaio de tração do material. Para amostras de material com espessura nominal (t_b) de 6,0 mm, a tensão de escoamento é igual a resistência à tração com 0,2% de deformação específica (KAZUYA, 2017).

Figura 45 – Relação tensão - deformação

Fonte: Kazuya (2017)

A Tabela 7 apresenta as propriedades mecânicas do aço, em que t_b é a espessura nominal do perfil, E é o módulo de Young, f_y é a tensão de escoamento, f_u é a tensão última e $Y.R.$ é a proporção da tensão de escoamento com a última.

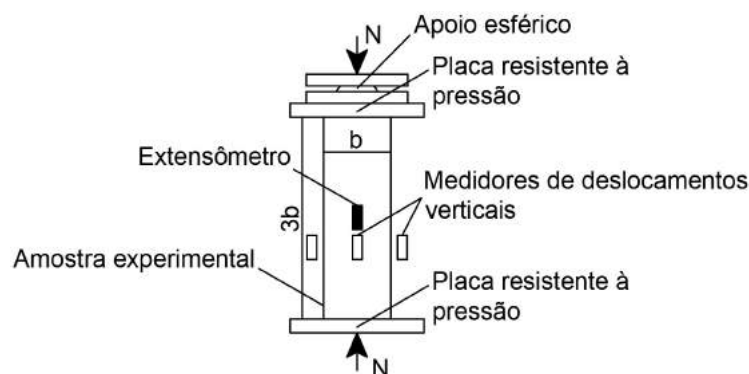
Tabela 7 – Propriedades do material

t_b (mm)	E (N/mm ²)	f_y (N/mm ²)	f_u (N/mm ²)	$Y.R.$ (%)
6,0	201800	405,2	454,0	89,3
9,0	211200	386,7	459,1	84,2

Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

Além disso, foi realizado um ensaio de compressão axial monotônico de coluna curta para confirmar a força axial de escoamento. No ensaio, o comprimento da amostra foi três vezes a largura da seção transversal. Desse modo, os comprimentos das amostras de 125 mm e 150 mm foram de 375 mm e 450 mm, respectivamente. A Figura 46 ilustra o desenho esquemático do ensaio, em que o valor do extensômetro foi lido durante o carregamento e os deslocamentos axiais foram medidos por quatro medidores dispostos simetricamente perto do centro da placa plana do corpo de prova (KAZUYA, 2017).

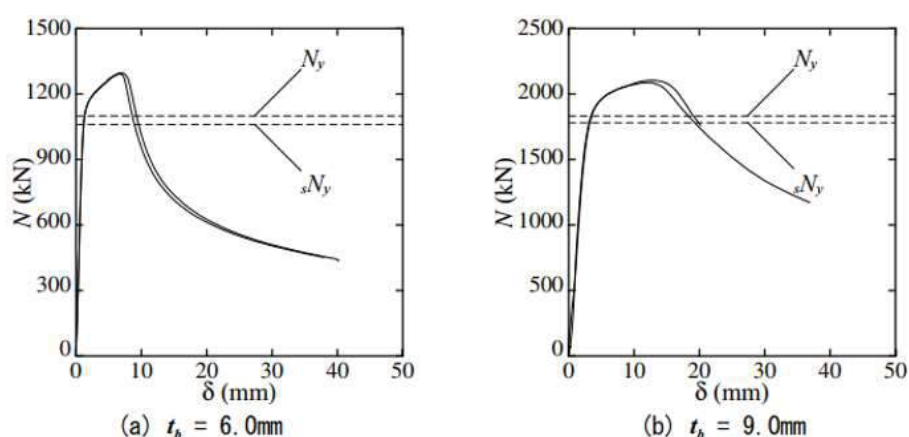
Figura 46 – Desenho esquemático do ensaio de compressão axial monotônico



Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

A relação carga *versus* deslocamento do ensaio de compressão axial monotônico é apresentada na Figura 47. A linha tracejada mostra o valor médio da força axial de escoamento (sN_y), que é a carga quando a rigidez axial é reduzida para 1/3 da rigidez axial inicial observada no ensaio de compressão em coluna curta (HIGUCHI et al., 2000). A força axial de escoamento (N_y) foi calculada pela multiplicação da área da seção transversal (A) e tensão de escoamento (f_y) obtida no ensaio de tração do material. Os resultados médios do ensaio são apresentados na Tabela 8 (KAZUYA, 2017).

Figura 47 – Diagrama carga – deslocamento do ensaio de compressão axial monotônico



Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

Tabela 8 – Resultados do ensaio de compressão axial monotônico

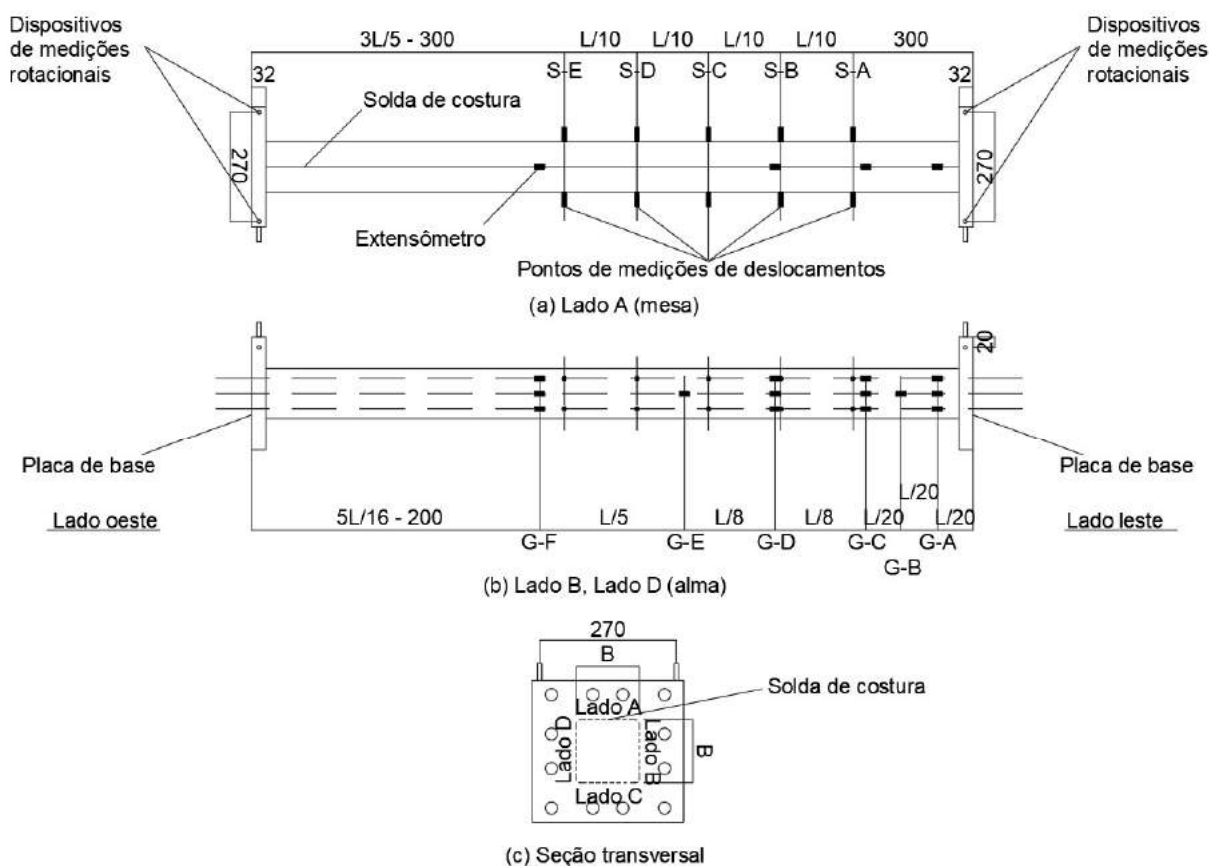
t_b (mm)	sN_y (kN)	sN_{max} (kN)	N_y (kN)	sN_y/N_y
6,0	1059	1291	1097	0,966
9,0	1781	2088	1832	0,972

Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

5.2 Ensaio experimental

A Figura 48 mostra a posição dos medidores de deslocamentos e extensômetros fixados no corpo de prova. Há um total de vinte medidores de deslocamento, sendo dez horizontais e dez verticais, em cinco seções transversais (seção transversal S-A, S-B, S-C, S-D e S-E). Dessa forma, foi possível medir o histórico de deslocamento na direção do deslocamento dentro e fora da superfície de flexão. Dois medidores de deslocamentos rotacionais foram instalados em cada extremidade do corpo de prova para medir o ângulo de rotação da extremidade. Além disso, medidores de tensão foram fixados nas posições (G-A, G-B, G-C, G-D, G-E, G-F) para medir a distribuição da tensão na direção do comprimento durante o carregamento. Como as propriedades do aço das soldas de costura são diferentes daquelas das chapas planas, ela foi instalada no lado A da seção transversal para reduzir o efeito da solda de costura no momento máximo de flexão e na capacidade de deformação plástica (KAZUYA, 2017).

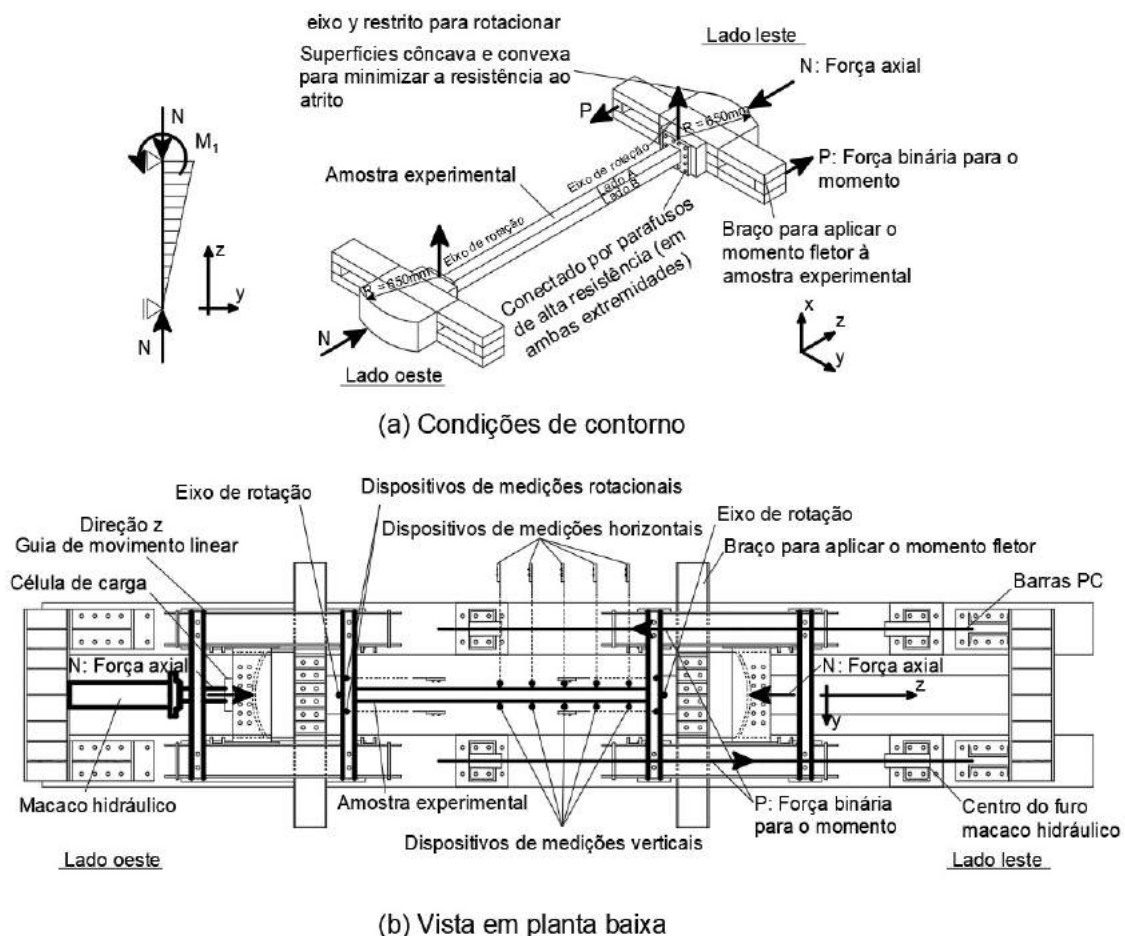
Figura 48 – Desenho esquemático das posições dos medidores de deslocamentos e extensômetros



Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

Para o carregamento, a força de compressão axial foi introduzida através de um macaco hidráulico localizado no lado oeste do corpo de prova, conforme Figura 49. A carga foi realizada por controle automático, para que a força compressiva axial fosse sempre mantida constante. Além disso, quando a força axial foi carregada, a posição da amostra foi ajustada através da leitura do valor do extensômetro, para que a posição do centroide coincidisse com o eixo de carga e não ocorresse excentricidade. O momento fletor foi calculado a partir da multiplicação da força binária das barras PC pela distância entre a barra e o eixo de rotação. Ressalta-se que o eixo de rotação apenas permite rotação na direção do eixo x. Os gabaritos de pinos instalados nas duas extremidades têm vários rolamentos colocados entre as superfícies côncava e convexa para minimizar a resistência ao atrito. Foram apoiados dessa maneira para que possam acompanhar a rotação mesmo quando uma força axial é aplicada. A carga nas barras PC é aplicada até que a amostra não consiga reter a força de compressão axial ou o curso máximo do gabarito de pino. O experimento foi conduzido até atingir cerca de 0,30 rad (KAZUYA, 2017).

Figura 49 – Condições de contorno e vista em planta baixa do ensaio experimental



Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

A Tabela 9 mostra as dimensões geométricas das seções transversais dos perfis utilizados, em que b é a largura do perfil, t é a espessura, b/t é a relação entre largura e espessura, A é a área, I é o momento de inércia, i_x é o raio de giração, Z_p é o módulo plástico da seção e M_p é o momento de plastificação total (KAZUYA, 2017).

Tabela 9 – Dimensões geométricas das seções transversais

Seção transversal	b (mm)	t (mm)	b/t	A (mm ²)	I (x 10 ⁴ mm ⁴)	i_x (mm)	Z_p (x 10 ³ mm ³)	M_p (mm ²)
125 x 125 x 6	125,0	5,827	21,5	2707	632,4	48,33	119,9	48,58
150 x 150 x 9	150,2	8,667	17,3	4713	1540	57,16	246,5	95,32

Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

5.3 Resultados experimentais

A Tabela 10 lista os resultados experimentais. No nome do corpo de prova, os números após os termos “B”, “bt”, “ny” e L indicam, respectivamente, largura nominal da seção transversal, relação largura-espessura nominal, razão de força axial e comprimento da amostra. A força de compressão (N) introduzida foi calculada através da multiplicação da área da seção transversal com a tensão de escoamento obtida no teste de tração do material. M_{max} é o momento máximo de flexão e θ_u é a rotação última (KAZUYA, 2017).

Segundo Kazuya (2017), foram identificados três modos de colapsos:

- Flambagem local (FL): quando o momento de flexão máximo foi atingido, a flambagem local apareceu na superfície da alma lateral de compressão (lado D), próximo ao ponto de carregamento do momento de flexão, diminuindo rapidamente a resistência. Com o carregamento subsequente, a flambagem local progrediu e o diagrama tornou-se uma curva suave até a rotação máxima do experimento (cerca de 0,30 rad);
- Não linearidade geométrica + flambagem local (NLG + FL): quando o momento máximo de flexão foi atingido, a flambagem local apareceu na superfície da alma lateral de compressão (Lado D) perto da posição $Z = 0,80L$. O carregamento subsequente aumentou a deformação da flambagem local e diminuiu repentinamente a resistência do corpo de prova;
- Não linearidade geométrica (NLG): quando o momento máximo de flexão foi atingido, a resistência diminuiu continuamente até atingir o valor zero, sem a presença de flambagem local.

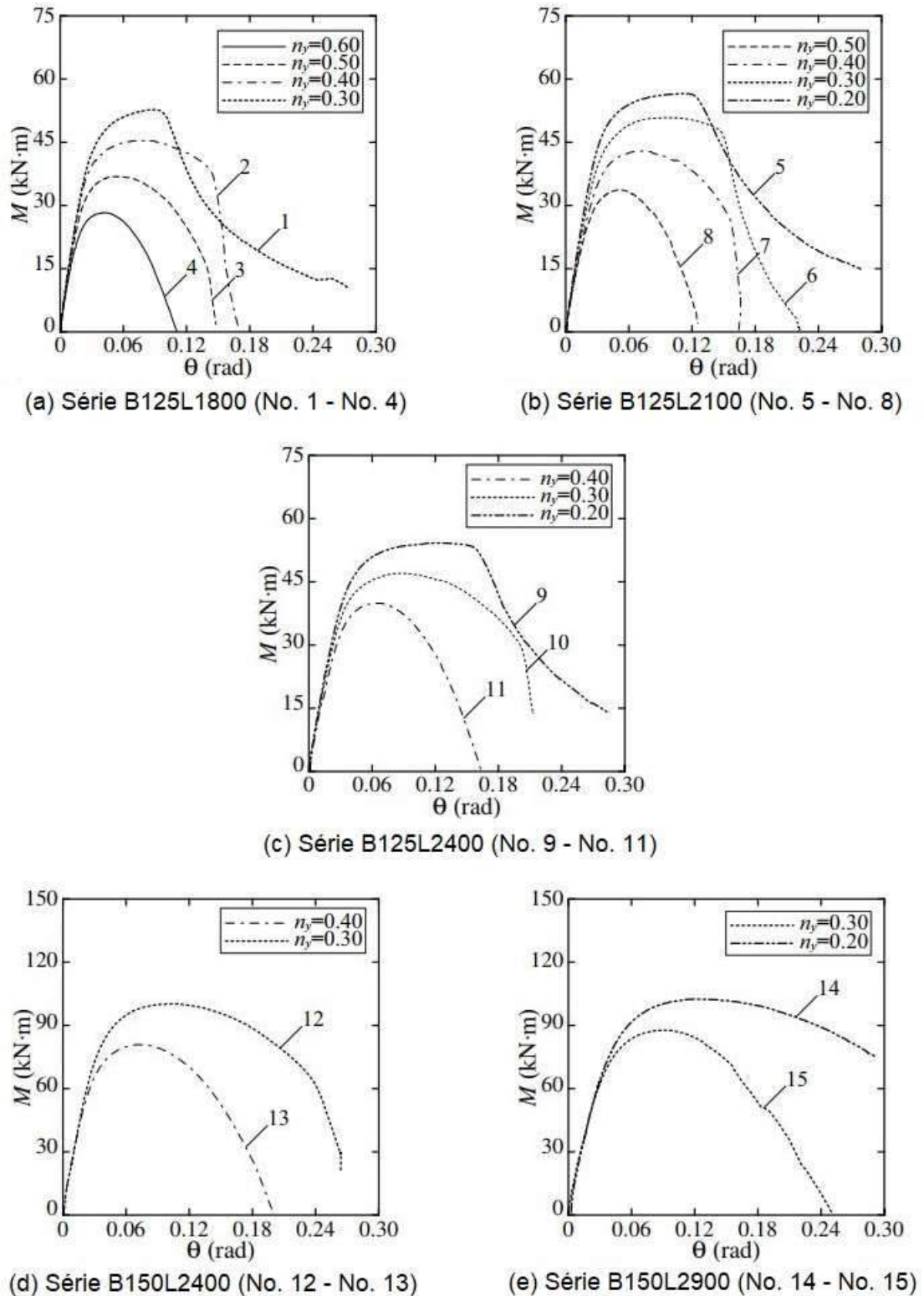
Tabela 10 – Resultados experimentais

No.	Nome do corpo de prova	L (mm)	λ	n_y	N (kN)	M_{max} (kN.m)	θ_u (rad)	Modo de colapso
1	B125bt21ny30L1800	1800	37,2	0,30	329,0	52,73	0,107	FL
2	B125bt21ny40L1800			0,40	438,7	45,41	0,132	NLG + FL
3	B125bt21ny50L1800			0,50	548,7	36,88	0,092	NLG
4	B125bt21ny60L1800			0,60	658,1	28,29	0,063	NLG
5	B125bt21ny20L2100	2100	43,4	0,20	219,4	56,58	0,136	FL
6	B125bt21ny30L2100			0,30	329,0	50,87	0,151	NLG + FL
7	B125bt21ny40L2100			0,40	438,7	42,92	0,119	NLG
8	B125bt21ny50L2100			0,50	548,4	33,73	0,068	NLG
9	B125bt21ny20L2400	2400	49,7	0,20	219,4	54,20	0,169	FL
10	B125bt21ny30L2400			0,30	329,0	46,96	0,149	NLG
11	B125bt21ny40L2400			0,40	438,7	39,87	0,087	NLG
12	B150bt17ny30L2400	2400	42,0	0,30	549,6	100,3	0,174	NLG
13	B150bt17ny40L2400			0,40	732,8	80,88	0,108	NLG
14	B150bt17ny20L2900	2900	50,7	0,20	366,4	102,3	0,225	NLG + FL
15	B150bt17ny30L2900			0,30	549,6	87,42	0,122	NLG

Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

Diante disto, observou-se que o modo de colapso das amostras com mesmo comprimento de material e menor razão de força axial foi determinado por flambagem local, conforme Figura 50. À medida que a razão de força axial (n_y) aumenta, a deformação na superfície de flexão devido ao efeito de segunda ordem aumenta. Dessa forma, o tipo de colapso muda, sendo determinado pela deformação no plano de flexão devido ao efeito de segunda ordem. Além disso, à medida que o comprimento do material aumenta, a quantidade de deslocamento na superfície de flexão também aumenta, devido ao efeito de segunda ordem (KAZUYA, 2017).

Figura 50 – Relação entre momento e rotação dos resultados experimentais

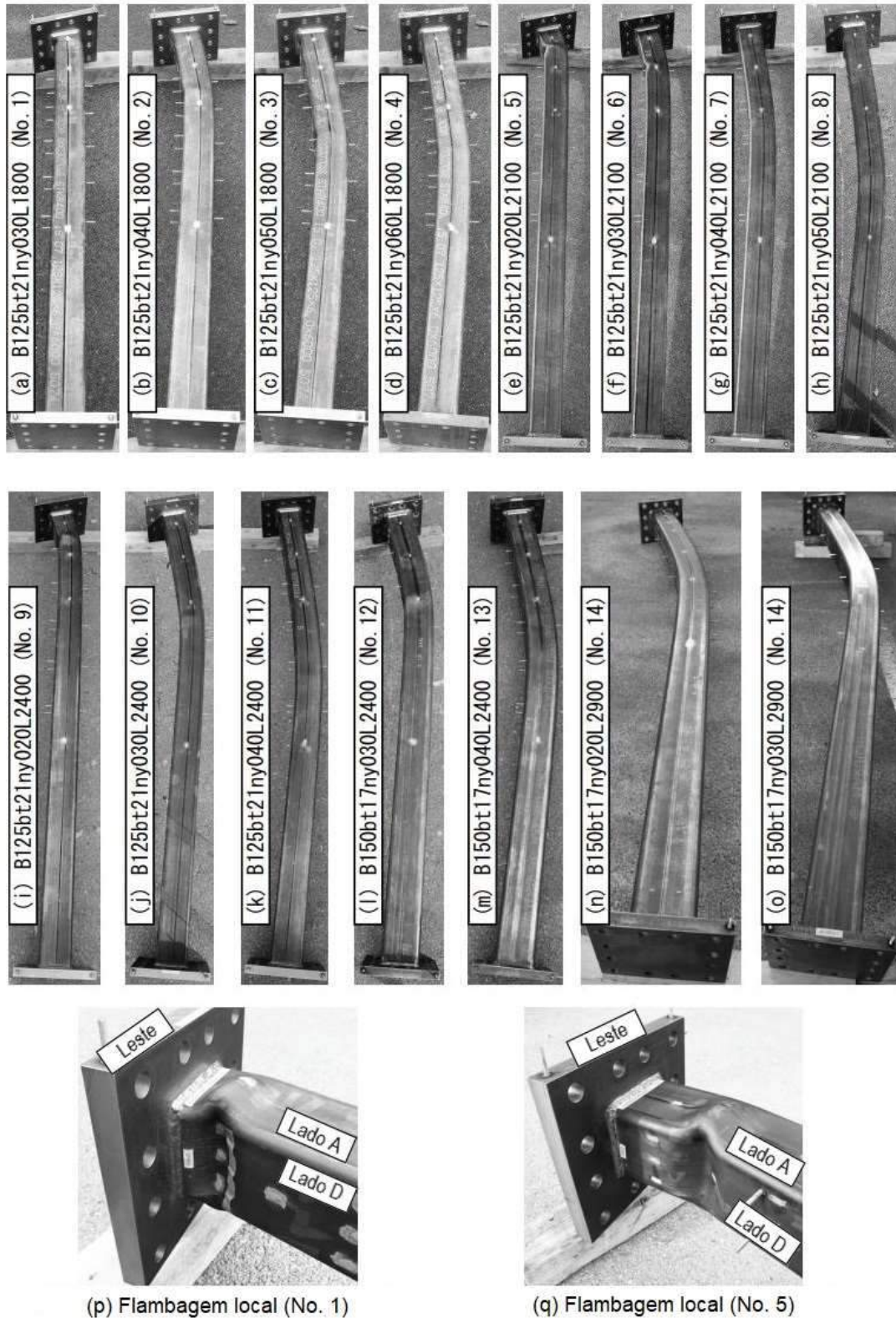


Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

A Figura 51 apresenta a configuração das deformações após o carregamento de todas as amostras utilizadas no ensaio experimental. A flambagem local nas amostras número 1 e 5 foi

localizada na superfície da alma lateral de compressão (lado D), próximo ao ponto de carregamento do momento de flexão, conforme Figura 51(p) e (q) (KAZUIA, 2017).

Figura 51 – Deformação após o carregamento



Fonte: Adaptado de Kazuya (2017)

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para avaliar a precisão dos modelos de dano concentrado propostos no capítulo 4, os resultados destes modelos numéricos foram comparados com os experimentais de Kazuya (2017) apresentados no capítulo 5 deste trabalho.

Como o objetivo foi elaborar modelos de dano concentrado aplicados à flambagem local em perfis vazados de aço estrutural submetidos à flexão composta, só foram analisados os resultados experimentais com modo de colapso determinado por flambagem local (FL) ou não linearidade geométrica junto com flambagem local (NLG + FL). Diante disto, somente foram analisados os resultados experimentais números 1, 2, 5, 6, 9 e 14 de Kazuya (2017). A Tabela 11 mostra os dados de entrada utilizados no programa para cada experimento.

Tabela 11 – Dados de entrada utilizados no programa

No.	E (N/mm ²)	f_y (N/mm ²)	b (mm)	t (mm)	A (mm ²)	I (x 10 ⁴ mm ⁴)	L (mm)	n_y	k_m	θ_{final} (rad)
1	201800	405,2	125,0	5,827	2707	632,4	1800	0,30	5,00	0,30
2								0,40		
5							2100	0,20		
6								0,30		
9							2400	0,20		
14	211200	386,7	150,2	8,667	4713	1540	2900	0,20		0,40

Fonte: O autor (2020)

Segundo as diretrizes da AISC (2016), as seções transversais 125 x 125 x 6 mm e 150 x 150 x 9 mm são consideradas com mesas e almas compactas, como mostra a Tabela 12. Desse modo, pode-se utilizar a hipótese do modelo baseado na AISC (2016), em que o momento último (M_u) acontece quando toda a seção transversal está plastificada.

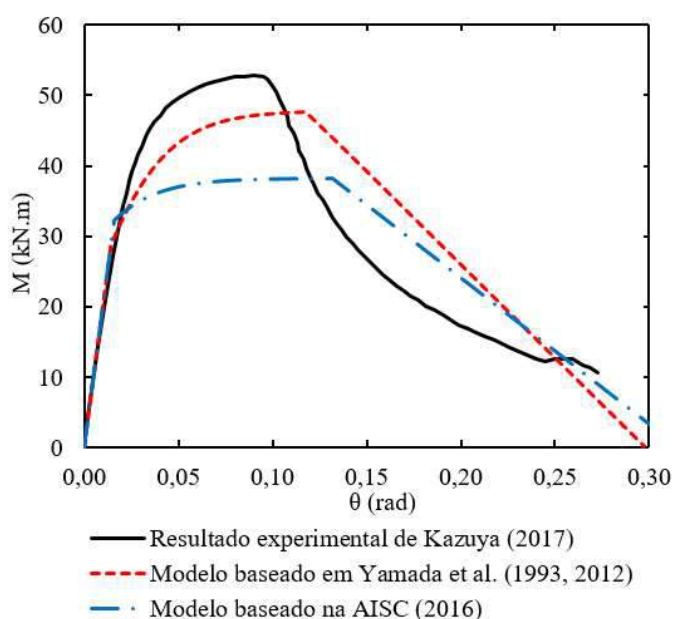
Tabela 12 – Classificação das seções transversais de acordo com a AISC (2016)

Seção transversal	Elemento	$b' = h$ (mm)	t (mm)	$\frac{b'}{t}$	Limite de esbeltez		Classificação (AISC, 2016)
					λ_p	λ_r	
125 x 125 x 6	Mesas	113,346	5,827	19,45	25,00	31,24	Compactas
	Almas				54,01	127,20	Compactas
150 x 150 x 9	Mesas	132,866	8,667	15,33	26,18	32,72	Compactas
	Almas				56,56	133,21	Compactas

Fonte: O autor (2020)

A Figura 52 mostra a comparação entre os resultados numéricos e o experimento número 1 de Kazuya (2017). Neste ensaio, a seção transversal do corpo de prova é 125 x 125 x 6 mm, com razão de força axial (n_y) fixada em 0,30, comprimento total da amostra igual a 1800 mm e modo de colapso determinado por flambagem local. Percebe-se que o comportamento do modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) segue a tendência da curva experimental. Por outro lado, o modelo não conseguiu representar o comportamento pós flambagem local do experimento, devido a consideração linear da lei de evolução da flambagem local. Já o modelo baseado na AISC (2016) possui momento último bastante conservador quando comparado com o experimento. A provável explicação disso deve-se ao fato que a curva de interação da AISC (2016) foi elaborada a partir de curvas aproximadas de perfis I, podendo ser conservadora para os demais tipos de perfis.

Figura 52 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 1 de Kazuya (2017)

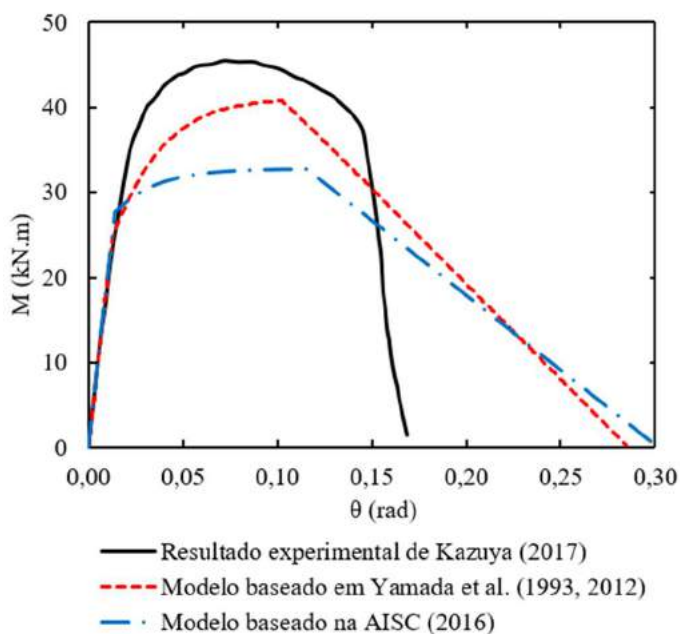


Fonte: O autor (2020)

A comparação entre os resultados numéricos e o experimento número 2 de Kazuya (2017) são apresentadas na Figura 53. No ensaio, a seção transversal do corpo de prova é 125 x 125 x 6 mm, com razão de força axial (n_y) fixada em 0,40, comprimento total da amostra igual a 1800 mm e modo de colapso determinado pela deformação no plano de flexão devido ao efeito de segunda ordem junto com flambagem local. Dentre os dois modelos numéricos, o baseado em Yamada et al. (1993, 2012) foi o que mais se aproximou do resultado experimental. No entanto, apesar dos modelos considerarem grandes deformações e o efeito de segunda

ordem, eles não apresentaram uma queda repentina na resistência após a flambagem local, possuindo um comportamento diferente do observado no experimento.

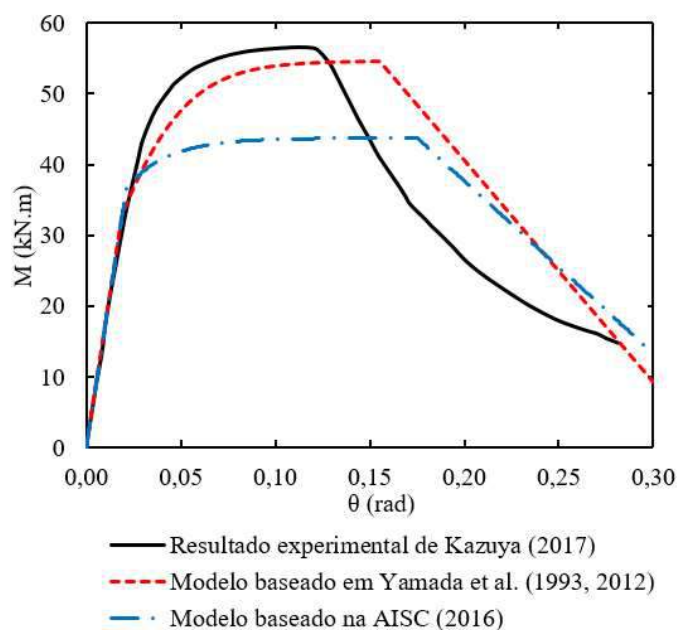
Figura 53 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 2 de Kazuya (2017)



Fonte: O autor (2020)

A Figura 54 mostra a comparação entre os resultados numéricos e o experimento número 5 de Kazuya (2017). Neste ensaio, a seção transversal do corpo de prova é 125 x 125 x 6 mm, com razão de força axial (n_y) fixada em 0,20, comprimento total da amostra igual a 2100 mm e modo de colapso determinado por flambagem local. Observa-se que a solução do modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) está bem ajustada ao resultado experimental, com o momento último muito próximo do valor obtido pelo experimento, diferente do modelo baseado na AISC (2016), em que o momento último continua sendo mais conservador. Além disso, os modelos numéricos também não conseguiram descrever o comportamento após a flambagem local do experimento, em que a deterioração é uma curva não linear.

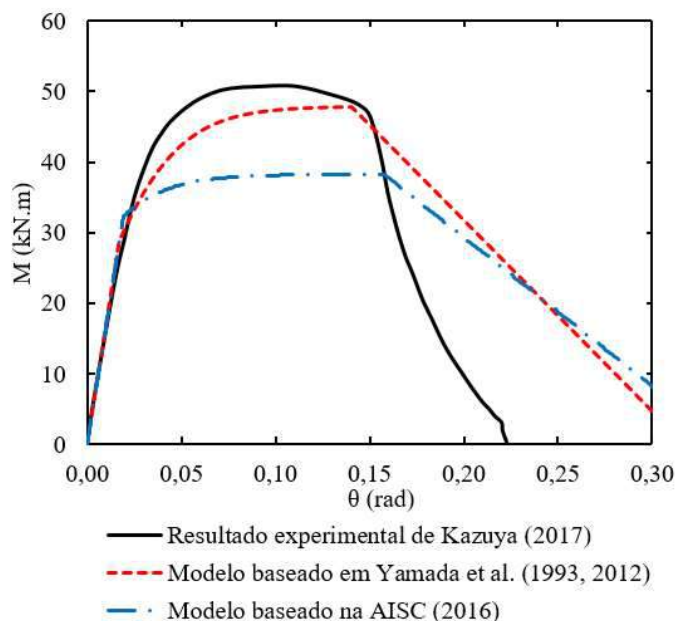
Figura 54 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 5 de Kazuya (2017)



Fonte: O autor (2020)

A comparação entre os resultados numéricos e o experimento número 6 de Kazuya (2017) são apresentadas na Figura 55. No ensaio, a seção transversal do corpo de prova é 125 x 125 x 6 mm, com razão de força axial (n_y) fixada em 0,30, comprimento total da amostra igual a 2100 mm e modo de colapso determinado pela deformação no plano de flexão devido ao efeito de segunda ordem junto com flambagem local. Assim como no ensaio número 2, o modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) foi o que mais se aproximou da curva experimental, capturando o comportamento elástico e elastoplástico do experimento. Ressalta-se que nos dois modelos, as rotações em que se iniciam a flambagem local ficaram próximas do experimental. Entretanto, não apresentaram uma queda repentina na resistência após a flambagem local.

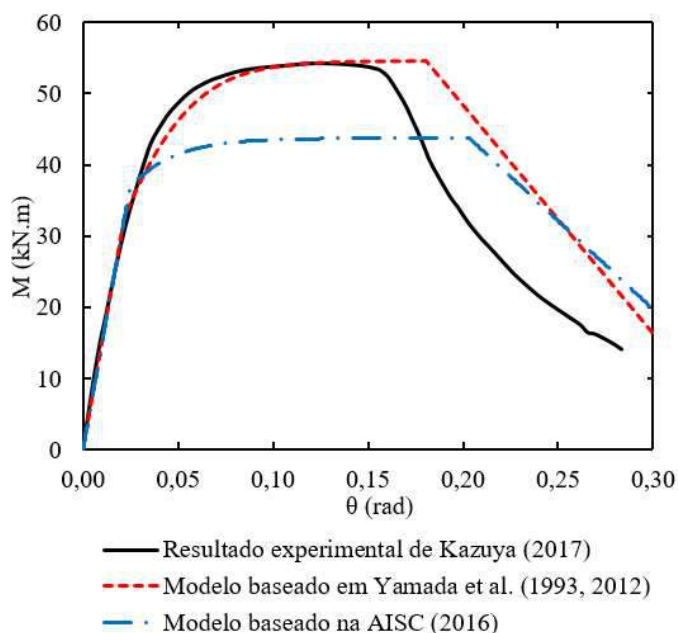
Figura 55 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 6 de Kazuya (2017)



Fonte: O autor (2020)

A Figura 56 mostra a comparação entre os resultados numéricos e o experimento número 9 de Kazuya (2017). Neste ensaio, a seção transversal do corpo de prova é 125 x 125 x 6 mm, com razão de força axial (n_y) fixada em 0,20, comprimento total da amostra igual a 2400 mm e modo de colapso determinado por flambagem local. Percebe-se que o comportamento do modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) ficou semelhante ao resultado experimental, em que tanto os valores do momento último como da rotação em que se inicia a flambagem local ficaram próximos dos experimentais. Por outro lado, os modelos não descreveram o comportamento não linear da curva após a flambagem local.

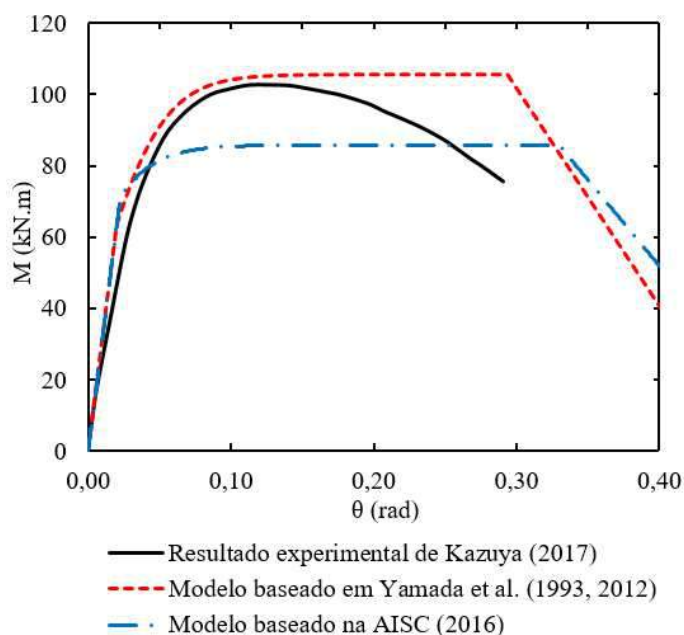
Figura 56 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 9 de Kazuya (2017)



Fonte: O autor (2020)

A comparação entre os resultados numéricos e o experimento número 14 de Kazuya (2017) são apresentadas na Figura 57. No ensaio, a seção transversal do corpo de prova é 150 x 150 x 9 mm, com razão de força axial (n_y) fixada em 0,20, comprimento total da amostra igual a 2900 mm e modo de colapso determinado pela deformação no plano de flexão devido ao efeito de segunda ordem junto com flambagem local. Observa-se que o modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) seguiu a tendência da curva experimental nos regimes elásticos e elastoplásticos. Entretanto, os valores das rotações em que se iniciam a flambagem local dos dois modelos numéricos ficaram distantes do experimental.

Figura 57 – Comparação da relação $M \times \theta$ do experimento número 14 de Kazuya (2017)



Fonte: O autor (2020)

A Tabela 13 mostra um comparativo entre as rotações experimentais que iniciaram a flambagem local ($\theta_u^{exp.}$) de Kazuya (2017) e as obtidas pelos modelos numéricos (θ_u). Através da relação entre esses valores, é possível observar que os dois modelos tiveram boas aproximações nas rotações em que foram iniciadas as flambagens locais. Percebe-se também que no experimento número 14, ambos tiveram resultados superiores aos experimentais, variando em torno de 30%. Diante disto, acredita-se que além da esbeltez dos elementos da seção transversal, a esbeltez do corpo de prova também influencia no processo, acelerando o momento em que ocorre a flambagem local devido ao efeito de segunda ordem. Além disso, a Tabela 13 apresenta os valores do parâmetro (p_{cr}) obtidos nos dois modelos numéricos.

Tabela 13 – Comparação entre os valores numéricos e experimentais de θ_u

No.	$\theta_u^{exp.}$ (rad)	b/t	α	μ_0	Modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012)				Modelo baseado na AISC (2016)			
					$\theta_y^{Yam.}$ (rad)	$\theta_u^{Yam.}$ (rad)	$p_{cr}^{Yam.}$ (rad)	$\frac{\theta_u^{exp.}}{\theta_u^{Yam.}}$	θ_y^{AISC} (rad)	θ_u^{AISC} (rad)	p_{cr}^{AISC} (rad)	$\frac{\theta_u^{exp.}}{\theta_u^{AISC}}$
1	0,107	21,5	0,924	8,216	0,014	0,117	0,094	0,915	0,016	0,132	0,113	0,811
2	0,132				0,013	0,102	0,082	1,294	0,014	0,115	0,099	1,148
5	0,136				0,019	0,155	0,124	0,877	0,021	0,175	0,150	0,777
6	0,151				0,017	0,140	0,112	1,079	0,019	0,157	0,135	0,962
9	0,169				0,022	0,180	0,144	0,939	0,025	0,203	0,174	0,833
14	0,225	17,3	0,550	14,62	0,020	0,293	0,260	0,768	0,023	0,330	0,303	0,682

Fonte: O autor (2020)

A Tabela 14 apresenta o comparativo entre os valores dos momentos máximos experimentais ($M_{max}^{exp.}$) e os obtidos pelos modelos numéricos (M_u). Observa-se que o modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) possui valores mais próximos dos experimentais, variando em torno de 10% para mais ou para menos. Já os resultados do modelo baseado na AISC (2016) foram bastante conservadores em todos experimentos, chegando o valor de ($M_{max}^{exp.}$) ser maior em 38% em relação ao (M_u^{AISC}) nos experimentos números 1 e 2.

Tabela 14 – Comparação entre os valores numéricos de M_u e experimentais de M_{max}

No.	$M_{max}^{exp.}$ (kN.m)	Modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012)			Modelo baseado na AISC (2016)		
		$M_y^{Yam.}$ (kN.m)	$M_u^{Yam.}$ (kN.m)	$\frac{M_{max}^{exp.}}{M_u^{Yam.}}$	M_y^{AISC} (kN.m)	M_u^{AISC} (kN.m)	$\frac{M_{max}^{exp.}}{M_u^{AISC}}$
1	52,73	28,70	47,83	1,102	32,29	38,26	1,378
2	45,41	24,60	41,00	1,108	27,68	32,79	1,385
5	56,58	32,80	54,67	1,035	36,90	43,73	1,294
6	50,87	28,70	47,83	1,064	32,29	38,26	1,330
9	54,20	32,80	54,67	0,991	36,90	43,73	1,239
14	102,30	63,44	105,73	0,968	71,37	85,79	1,192

Fonte: O autor (2020)

7 CONCLUSÃO

Este trabalho foi desenvolvido visando elaborar modelos de dano concentrado aplicados à flambagem local em perfis vazados de aço estrutural submetidos à flexão composta. Entretanto, os modelos necessitaram dos valores de alguns parâmetros que são obtidos experimentalmente, como: rotação plástica crítica (p_{cr}) e a inclinação da reta de evolução do dano (k_m). Como muitas vezes as simulações numéricas são realizadas para substituir ensaios de laboratório de difícil execução, este trabalho propôs adicionar no modelo de dano concentrado equações baseadas em Yamada et al. (1993, 2012) e AISC (2016) para calcular analiticamente esses parâmetros e o momento último (M_u). Entretanto, por não ter conseguido fazer uma relação entre o valor de (k_m) com a teoria, foram realizados testes de convergência nos quais quando (k_m) foi igual a 5 obtiveram-se os melhores resultados numéricos.

Os resultados numéricos dos dois modelos foram comparados com seis experimentos de Kazuya (2017), em que perfis formados a frio de seção quadrada vazada foram submetidos à força de compressão axial e um carregamento de momento fletor monotônico. Desses seis experimentos, metade tiveram o modo de colapso determinado por flambagem local e a outra metade foi devido à não linearidade geométrica junto com flambagem local.

Ao analisar os gráficos, foi possível concluir que os resultados numéricos do modelo baseado em Yamada et al. (1993, 2012) mostraram-se satisfatórios, visto que as curvas apresentaram comportamento semelhante aos experimentais. Em todas simulações, o modelo baseado na AISC (2016) possuiu momentos últimos conservadores quando comparados com os experimentais. Acredita-se que a provável explicação se deve ao fato da curva de interação da AISC (2016) ter sido elaborada a partir de curvas aproximadas de perfis I, podendo ser conservadora para outros tipos de perfis.

Foi observado que os experimentos com modo de colapso determinado somente por flambagem local têm curva bastante característica após o início da deterioração. Inicialmente, com maior perda de rigidez, tornando-se uma curva mais suave no decorrer do processo de deterioração. Sendo assim, os modelos numéricos não conseguiram descrever este comportamento devido a consideração linear da equação da lei de evolução da flambagem local.

Os experimentos que tiveram o modo de colapso determinado por efeito de segunda ordem junto com flambagem local tiveram uma queda repentina de resistência pouco após a flambagem local. Apesar dos modelos numéricos considerarem grandes deformações e o efeito de segunda ordem, eles não apresentaram o mesmo comportamento, uma vez que o valor

adotado de (k_m) foi igual a 5 e que para esses casos, a evolução do dano tende a ser maior. Portanto, a representação do modo de colapso dos experimentos é muito sensível à escolha do valor deste parâmetro, sendo essencial que ele possa ser calculado ou obtido experimentalmente e não adotado.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Tendo em vista a grande sensibilidade dos modelos à escolha do valor da inclinação da reta de evolução do dano (k_m) , é interessante realizar um estudo para propor uma equação que possa calculá-lo, evitando que ele seja adotado ou necessite de ensaios experimentais para obter o seu valor.

Os modelos numéricos foram comparados com os ensaios de Kazuya (2012), em que os perfis foram submetidos à força de compressão axial e um carregamento de momento fletor monotônico. Diante disto, sugere-se testar esses modelos para outros tipos de carregamento, como: cíclicos, momento de flexão monotônico antissimétrico, flexão simples, dentre outros.

A equação utilizada para calcular a rotação em que inicia a flambagem local é em função da razão entre largura e espessura dos perfis. Entretanto, no corpo de prova com maior comprimento e mais esbelto, percebeu-se que os valores obtidos pela equação foram superiores aos experimentais, o que indica que a esbeltez pode acelerar o momento em que ocorre a flambagem local devido ao efeito de segunda ordem. Diante disto, sugere-se a realização de ensaios experimentais para analisar a influência da esbeltez do corpo de prova no valor desse parâmetro e caso seja comprovado, que seja proposta uma nova equação que leve em consideração tanto a esbeltez dos elementos da seção transversal quanto do corpo de prova.

Os resultados experimentais mostraram um comportamento não linear após o início da flambagem local. Dessa forma, é importante que seja proposta uma equação alternativa para a lei de evolução da flambagem local que possa descrever esse processo não linear de deterioração do corpo de prova.

REFERÊNCIAS

- AKAZAWA, M.; ITO, Y.; SHIMADA, Y.; MATSUOKA, Y.; YAMADA, S.; SUITA, K. Member test for full collapse test of full-scale steel building part 3. **Japan Earthquake Engineering Association Annual Report 2007**, p. 218-219, 2007 (in Japanese).
- ALPSTEN, G. A.; TALL, L. Residual stresses in heavy welded shapes. **Welding Journal**, v. 49, n. 3, p. 93-105, 1970.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **Specification for structural steel buildings**. New York, 1923.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **Specification for the design, fabrication, and erection of structural steel buildings**. New York, 1936.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **Specification for the design, fabrication, and erection of structural steel buildings**. New York, 1961.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **Load and resistance factor design specification for structural steel buildings**. Chicago, 1986.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **Specification for structural steel buildings**. Chicago, 2016.
- AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE. **North American specification for the design of cold-formed steel structural members**. Washington, DC, 2016.
- AMORIM, D. L. N. F. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analyses: new developments and applications**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos, 2016.
- AMORIM, D. L. N. F.; PIEDADE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. The extended lumped damage mechanics: A new formulation for analysis of softening with FE size-independence. **Mechanics Research Communications**, v. 90, p. 13-18, 2018.
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 24, p. 4070-4079, 2013.
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modeling of cracking in concrete: application in tunnel linings. **Engineering Structures**, v. 70, p. 23-35, 2014.
- ARNEDO, A.; MIRAMBELL, E.; REAL, E. Deformations of flexural members of austenitic stainless steel. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 46, p. 456, 1998.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14762**: Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio. Rio de Janeiro, 2010.

AUSTRALIAN/ NEW ZEALAND STANDARD. **Cold-formed steel structures**. Sydney, 2018.

BAI, Y.; GUAN, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Development of a damage model for assessing fracture failure of steel beam-to-column connections subjected to extremely low-cycle fatigue. **Engineering Failure Analysis**, v. 82, p. 823-834, 2017.

BAI, Y.; KURATA, M.; FLÓREZ-LÓPEZ, J.; NAKASHIMA, M. Macromodeling of crack damage in steel beams subjected to nonstationary low cycle fatigue. **Journal of Structural Engineering**, v.142, p. 04016076, 2016.

BAZÁN, J. A. V. **Fadiga de pórticos planos via mecânica do dano concentrado considerando incertezas**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos, 2017.

BAZÁN, J. A. V., BECK, A. T., FLÓREZ-LÓPEZ, J. Random fatigue of plane frames via lumped damage mechanics. **Engineering Structures**, v. 182, p. 301-315, 2019.

BEBIANO, R.; CAMOTIM, D.; GONÇALVES, R. GBTul 2.0 – A second-generation for the GBT – based buckling and vibration analysis of thin-walled members. **Thin-Walled Structures**, v. 124, p. 235-257, 2018.

BITTEM COURT, T. N. **Fraturamento do concreto estrutural: aspectos teóricos, computacionais e experimentais, e suas aplicações**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 1999.

BJORHOVDE, R. **Deterministic and probabilistic approaches to the strength of steel columns**. Tese de Pós Doutorado, Lehigh University, Pensilvânia, 1972.

BLEICH, F. **Buckling strength of metal structures**. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.

BREDENKAMP, P. J.; Van den BERG, G. J.; Van der MERWE, P. The behavior of hot-rolled and built-up stainless steel structural members. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 46, p. 464, 1998.

CARVALHO, P. R. M.; GRIGOLETTI, G.; BARBOSA, G. D. **Curso básico de perfis de aço formados a frio**. 3. ed. Porto Alegre, 2014.

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1113-1126, 1995.

COELHO, K. O. **Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos, 2017.

COSTA, A. A. R. **Estudo da flambagem local de perfis U enrijecidos em situação de incêndio**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2012.

EARLS, C. J. Effects of material property stratification and residual stresses on single angle flexural ductility. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 51, p. 147-175, 1999.

FAKURY, R. H.; CASTRO E SILVA, A. L. R.; CALDAS, R. B. **Dimensionamento de elementos estruturais de aço e mistos de aço e concreto**. Person Education do Brasil, São Paulo, p. 137-138, 2016.

FEBRES, R.; INGLESSIS, P.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modeling of local buckling in tubular steel frames subjected to cyclic loading. **Computers and Structures**, v. 81, p. 2237-2247, 2003.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Análisis de estructuras aporticadas mediante la mecánica de la degradación. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria**, vol. 9, p. 123-139, 1993.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified Model of Unilateral Damage for RC Frames. **Journal Mechanics for Structural Engineering**, vol. 121, p. 1765-1772, 1995.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Applications**. 1 ed. IGI Global, Hershey, 2015.

GAMBHIR, M. L. **Stability Analysis and Design of Structures**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2004.

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A**, v. 221, p. 163-198, 1921.

GUERRERO, N.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Análisis de vigas tubulares de acero estructural sometidas a flexión biaxial mediante la teoría del daño concentrado. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria**, v. 25, n. 1, p. 3-27, 2009.

GUERRERO, N.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Model of local buckling in steel hollow structural elements subjected to biaxial bending. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 63, n. 6, p. 779-790, 2007.

HANCOCK, G.; KWON, Y. B.; BERNARD, E. S. Strength design curves for thin-walled sections undergoing distortional buckling. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 31, p. 169-186, 1994.

HILL, H. N. **Determination of stress-strain relations from “offset” yield strength values**. NACA Technical Notes, n. 927, 1944.

INGLESSIS, P.; GÓMEZ, G.; QUINTERO, G.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Model of damage for steel frame members. **Engineering Structures**, v. 21, p. 954-964, 1999.

ISHIDA, T.; JIN, J.; SHIMADA, Y.; YAMADA, S. Degradation behavior of square steel tubular column subjected to repeated bending: Part 1. Fundamental study by three-point

bending experiment. **Architectural Institute of Japan Kanto Research Report**, p. 457-460, 2010 (in Japanese).

ISHIDA, T.; SHIMADA, Y.; YAMADA, S. Study on cyclic degradation behavior of rectangular steel tube columns. **Proceedings of the 13th Japan Earthquake Engineering Symposium**, p. 2874-2881, 2010 (in Japanese).

JAVARONI, C. E. **Perfis de aço formados a frio submetidos à flexão: análise teórico-experimental**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos, 1999.

KACHANOV, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. **Otdeleniye Technicheskikh Nauk**, v. 8, p. 28-31, 1958.

KAZUYA, M. **Study on elasto-plastic behavior of square steel tubular column under compressive axial force with bending moment**. Tese de Doutorado, Nagoya Institute of Technology, Nagoya, 2017 (in Japanese).

KIRSCH, G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. **Z. Vereines Deutscher Ing.**, v. 42, p. 797-807, 1898.

KITA, Y.; TSUJI, B. Elasto-plastic behavior of cold-formed square steel tube columns. **Architectural Institute of Japan Academic Lecture Summary C**, p. 1305-1306, 1991 (in Japanese).

KURATA, M.; NAKASHIMA, M.; SUITA, K. Test on large cyclic deformation of steel tube columns having fixed column bases. **Journal of Structural and Construction Engineering**, v. 598, p. 149-154, 2005 (in Japanese).

LEMAITRE J., DUFAILLY, J. Damage measurements. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 28, n. 5/6, p. 643-661, 1987.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mécaniques des matériaux solides**. Dunod, Paris, 1985.

MAQUOI, R. **Behaviour of plate components – Chapter 1**. Stability Problems of Steel Structures (edited by M. IVANYI e M. SKALOUD), Springer-Verlag Wien GMBH, Tchechoslováquia, 1992.

MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Three-dimensional analysis of reinforced concrete frames based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 19, p. 5109-5123, 2003.

PAIXÃO, J. F. M. **Dimensionamento via método da resistência direta de colunas em aço inoxidável de parede fina sob falha distorcional**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 2018.

PAULINO, L. T. **Estudo da resistência a flambagem em perfis formados a frio**. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRS, Porto Alegre, 2009.

PERDOMO, M. E.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E.; HILD, F.; ROUX, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Experimental analysis and mathematical modeling of fracture in RC elements with any aspect ratio. **Engineering Structures**, v. 46, p. 407-416, 2013.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Dimensionamento prático de acordo com a NBR 8800:2008**. 8. ed. LTC, Rio de Janeiro, 2009.

RABOTNOV, Y.N. Creep rupture. In: HETÉNYI, M.; VINCENTI, W. G. Applied Mechanics, 1969, Berlin. **Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics**, Berlin, Springer-Verlag, p. 342-349, 1969.

RAJASANKAR, J.; NAGESH, R.; PRASAD, A. Modelling inelastic hinges using CDM for nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures. **Computers and Concrete**, v. 6, n. 4, p. 319-341, 2009.

RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. Determination of stress-strain curves by three parameters. **NACA Technical Notes**, n. 503, 1941.

RHODES, J.; HARVEY, J. M. Examination of plate post buckling behavior. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 103, n. 3, p. 461-478, 1977.

RONDAL, J. **Buckling and iterative buckling of metal columns, optimum design under stability constraints and code aspects**. Coupled Instabilities in Metal Structures: Theoretical and Design Aspects (edited by J. RONDAL), Udine, Springer-Verlag Wien, n. 379, p. 345-372, New York, 1998.

SADAYOSHI, I.; TSUJIOKA, S.; YAJIMA, S.; SUGIYAMA, S. Experimental study on elastic-plastic bending behavior of cold formed square steel tubular section structure. **Academic Lecture at Architectural Institute of Japan**, p. 1351-1352, 1984 (in Japanese).

SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E.; MALHAS, F. A. **Steel Structures Design and Behavior**. 5. ed. Pearson Education, Inc., New Jersey, 2009.

SANTOS, W. S. **Interação flambagem global – flambagem local em pilares metálicos de seção I duplamente simétricos sob compressão uniforme**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, Vitória, 2002.

SARMANHO, A. M. C. **Estudo do comportamento pós crítico de paredes esbeltas de perfis metálicos**. 1991. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.

SCHAFER, B. W., PEKÖZ, T. Direct strength prediction of cold-formed steel members using numerical elastic buckling solutions. **Fourteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures**, St. Louis, Missouri, 1998.

SHAFFER, B. W. **CUFSM 4.05 Elastic buckling analysis of thin-walled members with general end boundary conditions software**. Users Manual and Tutorials, 2010. Disponível em: <https://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm/index_version4.htm>. Acesso em: 12 nov. 2019.

SHIMADA, Y.; AKAZAWA, M.; ITO, Y.; MATSUOKA, Y.; YAMADA, S.; SUITA, K. Shaking table test on the collapse behavior of small steel frames. **Architectural Institute of Japan**, v. 620, p. 125-132, 2007 (in Japanese).

SILVA, A. H. A.; COELHO, K. O.; SANTOS, T. D.; SIQUEIRA, G. H.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. VIEIRA JUNIOR, L. C. M. Towards a methodology to evaluate the impact of induced seismicity on the structural integrity of reinforced concrete structures. In: ICVRAM ISUMA-UNCERTAINTIES, 2018, Florianópolis. **Proceedings of the joint ICVRAM ISUMA UNCERTAINTIES conference**, 2018.

SILVA, A. L. R. C. **Análise Numérica não-linear da flambagem local de perfis de aço estrutural submetidos à compressão uniaxial**. 2006. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2006.

SILVA, E. L.; SILVA, V. P. **Dimensionamento de perfis formados a frio conforme NBR 14762 e NBR 6355**. Instituto Brasileiro de Siderurgia - IBS/ Centro Brasileiro da Construção em Aço - CBCA, Rio de Janeiro, 2008.

SOUZA, D. G. **Estudo da flambagem local da mesa de perfis I com alma senoidal via análise não-linear pelo MEF**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2006.

SWANSON ANALYSIS SYSTEMS INC. **Ansys reference manual, version 12.0.1**. Canonsburg, 2009.

TAI, Z.; IYAMA, J.; TAKADA, K.; KUWAMURA, H. Relationship between cyclic hysteresis curve and monotonic loading curve of steel members (Part 2). **Architectural Institute of Japan Kanto Branch Report**, Structural System, p. 89-92, 1998 (in Japanese).

TALL, L. **Welded built-up columns**. Fritz Engineering Laboratory Report, n. 249.29, Lehigh University, Pensilvânia, 1966.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. 2. ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.

TRAHAIR, N. S.; BRADFORD, M. A. **The Behaviour and Design of Steel Structures**. 2. ed. Chapman & Hall, London, 1988.

TSUDA, K.; MATSUI, C. Strength of square steel tubular beam-columns under constant vertical and horizontal loads. **Journal of Structural and Construction Engineering**, v. 512, p. 149-156, 1998 (in Japanese).

UCHOA, B. C. L. **Estimativa da rigidez à flexão em vigas de concreto simples por meio da teoria do dano concentrado**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Alagoas – UFAL, Maceió, 2017.

VALLOUREC & MANNESMANN TUBES. **Catálogos com informações técnicas – Tubos estruturais de seções circulares, quadradas e retangulares**, Rio de Janeiro, 2002. Disponível em: <<http://www.vallourec.com/COUNTRIES/BRAZIL/PT/Products-and->

services/automotive-industrial-tubes/Documents/Catalogo%20Estruturais.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2019.

Van der MERWE, P.; Van den BERG, G. J. **Experimental stress-strain curves for cold-rolled type 430 steel sheets**. Internal Report n. MD-36, Department of Civil Engineering, Rand Afrikaans University, Johannesburg, South African, 1987.

Von KARMAN, T.; SCHELER, E. E.; DONELL, L. H. The Strength of Thin Plates in Compression. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (ASME)**, v. 54, p. 53-57, 1932.

WINTER, G. Strength of Thin Steel Compression Flanges. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, v. 112, p. 527-554, 1947.

YAMADA, S.; AKIYAMA, H.; KUWAMURA, H. Post-buckling and deteriorating behavior of box-section steel members. **Journal of Structural and Construction Engineering**, v. 444, p. 135-143, 1993 (in Japanese).

YAMADA, S.; ISHIDA, T.; JIAO, Y. Hysteretic behavior of RHS Columns under random cyclic loading considering local buckling. **International Journal of Steel Structures**, v. 18, p. 1761-1771, 2018.

YAMADA, S.; ISHIDA, T.; SHIMADA, Y. Hysteresis model of RHS columns in the deteriorating range governed by local buckling. **Journal of Structural and Construction Engineering**, v. 674, p. 627-636, 2012 (in Japanese).

YAMADA, S.; KAWAMURA, S.; ISANI, A.; YAMANAKA, K. Study on elasto-plastic deformation and collapse behavior of square steel tubular columns subjected to repeated bending with multiple curvatures (I). **Architectural Institute of Kinki Branch Research Report**, Structural system, p. 381-384, 1984 (in Japanese).

YAMADA, S.; KAWAMURA, S.; ISANI, A.; YAMANAKA, K. Study on elasto-plastic deformation and collapse behavior of square steel tubular columns subjected to repeated bending with multiple curvatures (II). **Architectural Institute of Japan Annual Meeting**, p. 1347-1348, 1984 (in Japanese).

YAMADA, S.; KAWAMURA, S.; ISANI, A.; YAMANAKA, K. Study on elasto-plastic deformation and collapse behavior of square steel tubular columns subjected to repeated bending with multiple curvatures (III). **Architectural Institute of Kinki Branch Research Report**, Structural system, p. 469-472, 1985 (in Japanese).

YAMADA, S.; KAWAMURA, S.; ISANI, A.; YAMANAKA, K. Study on elasto-plastic deformation and collapse behavior of square steel tubular columns subjected to repeated bending with multiple curvatures (IV). **Architectural Institute of Japan Academic Lecture Summary C**, p. 679-480, 1985 (in Japanese).

YAMADA, S.; KAWAMURA, S.; ISANI, A.; YAMANAKA, K. Study on elasto-plastic deformation and collapse behavior of square steel tubular columns subjected to repeated bending with multiple curvatures (V). **Architectural Institute of Kinki Branch Research Report**, Structural system, p. 409-412, 1986 (in Japanese).

YAMADA, S.; KAWAMURA, S.; ISANI, A.; YAMANAKA, K. Study on elasto-plastic deformation and collapse behavior of square steel tubular columns subjected to repeated bending with multiple curvatures (VI). **Architectural Institute of Japan Academic Lecture Summary C**, p. 1109-1110, 1986 (in Japanese).

YAMADA, S.; SHIMADA, Y. Repeated loading test of rectangular steel tube columns with different loading directions. **Proceedings of the 13th Japan Earthquake Engineering Symposium**, p. 2868-2873, 2010 (in Japanese).

ZIEMIAN, R. D. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**. 6. ed. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.